GEOMETRIA PLANA Y ESPACIAL

GEOMETRIA PLANA Y ESPACIAL

Dolores Alía Aponte de Saravia
Profesora Titular de Geometría Axiomática

Publicación de la

Facultad de Ciencias Exactas — Universidad Nacional de Salta

Originales preparados por la autora
utilizando $\LaTeX$

Universidad Nacional de Salta
Av. Bolivia 5150 . Tel. (0387)425-5408
(4400) SALTA

ISBN: 987-9381-22-X

Hecho el depósito legal
Impreso en Argentina

Índice general

Prólogo

Este libro cubre casi todo el programa de "Geometría Plana y Espacial", una de las primeras asignaturas de las carreras de Profesorado en Matemática, Profesorado en Física, Licenciatura en Física, Licenciatura en Energías Renovables y Licenciatura en Matemática de la Universidad Nacional de Salta.

El orden elegido para el contenido del curso se debe a estar de acuerdo con estas tres propuestas:

(a). *Es conveniente estudiar el espacio, al menos en parte, antes de concentrarse en el plano.*

Muy frecuentemente se enfatiza que la virtud de los cursos de geometría elemental radica en que contribuyen fuertemente a desarrollar los razonamientos y el pensamiento lógico de los estudiantes. Esperamos que este curso sirva en ese sentido; pero pretendemos que también contribuya a desarrollar su capacidad de imaginar situaciones geométricas concretas que faciliten su aprendizaje de distintas propiedades geométricas o físicas.

Si sólo se persiguiera incrementar en los estudiantes su capacidad de razonar, y su confianza en sus propios razonamientos, podría analizarse primeramente el plano, que ya ofrece una cantidad suficiente de problemas lógicos diferentes; y posteriormente se podría usar esa capacidad de razonar con fluidez y esa confianza en los propios razonamientos para estudiar problemas espaciales. Pero creemos que es preferible que el alumno se enfrente cuanto antes al espacio porque, por un lado, los problemas lógicos que deberá analizar no son más difíciles, y por otro lado, quizás así, le resulten igualmente intuitivos los problemas planos y los espaciales. (Recordemos que estos problemas planos o espaciales aparecen frecuentemente en los primeros cursos de matemática y de física). Si eso se consigue, podrá ayudarse con su intuición para atacar problemas en dimensión uno, dos o tres, y sólo necesitará apelar a su madurez matemática para enfrentar problemas en dimensión mayor.

(b). *Es conveniente iniciar el estudio de las congruencias o transformaciones rígidas pensándolas como transformaciones biyectivas de todo el espacio, en lugar de comenzar estudiando propiedades de triángulos congruentes.*

Esto, por un lado, exige a los estudiantes que se familiaricen con una clase muy importamte de funciones — lo cual es útil para encarar otros estudios — y por otro lado les permite organizar mejor el conocimiento de las propiedades que van aprendiendo y/o recordando.

(c). *Es conveniente que cada estudiante tenga la oportunidad de recrear alguna parte del conocimiento*

En muchas asignaturas matemáticas y físicas, las reglas matemáticas que entran en juego están perfectamente determinadas y no se dedica ningún tiempo, a imaginar cuáles fueron las razones para elegir esas reglas. A lo sumo. se realiza algún tipo de experiencia para observar el acuerdo con esas reglas. Y no puede ser de otro modo si se quiere acercar a los estudiantes a las fronteras del conocimiento.

Sin embargo, creemos que Geometría Plana y Espacial es una asignatura ideal para detenerse un poco en el proceso de elegir esas reglas o axiomas (aun sin seguir exactamente lo ocurrido históricamente). Para todos los estudiantes, será una oportunidad de modelizar matemáticamente una realidad, que ya es intuivamente conocida por ellos. Quizás durante su vida profesional, algún físico pida ayuda a algún matemático para concretar una modelización. En ese momento habrá un experto en ese tema, el físico, y otro experto en algunas herramientas matemáticas, el matemático. Para la modelización del espacio que haremos aquí, esperamos que todos los estudiantes puedan asumir el papel de expertos en ambos aspectos.

En resumen, si bien en el curso se manejan axiomas, el objetivo fundamental del mismo no es la formalización completa de los estudios, sino más bien el hacer matemática aplicada sobre uno de los objetos de estudio más al alcance de casi todas las personas, el espacio.

Agradecimientos

Aunque soy la responsable del contenido de este libro, especialmente de los errores que seguramente habrán quedado muy a pesar mío, deseo manifestar que he tenido muy en cuenta todo lo desarrollado sobre este tema por el Dr. Juan A. Tirao, tanto en su libro [3] como en unas notas suyas no publicadas sobre “Geometría Plana”.

El libro está dedicado:

- A los estudiantes de esta asignatura en los últimos siete años; ellos han inspirado gran parte de las explicaciones incorporadas.
- A mis compañeros de trabajo del Departamento de Matemática, y especialmente a los que han trabajado conmigo en temas geométricos; ellos han provisto numerosas oportunidades de comentar y discutir sobre esos temas y han señalado errores en las notas que dieron origen a este libro.
- A mis familiares en varios lugares de la tierra; a lo largo del tiempo; ellos han permitido, alentado y disculpado mi dedicación al estudio de la matemática.

Capítulo I

Conceptos básicos

1. Puntos, rectas, planos. Llamado a la intuición

Pensamos al espacio que nos rodea como un conjunto de puntos, y reconocemos algunos subconjuntos de puntos que llamamos rectas y planos. Sabemos que hay infinitos puntos (es decir no podríamos contar todos los puntos, no terminaríamos nunca de hacerlo) y también infinitas rectas e infinitos planos.

Hay muchos objetos y fenómenos de la vida real que nos sugieren puntos y también muchos que sugieren rectas o planos ... En especial rectas y planos abundan entre las construcciones de los hombres. Quizás en una jungla no sería muy fácil, y tampoco muy útil, explicar qué se entiende por un plano. A propósito, muchos objetos y fenómenos naturales sugieren figuras de la geometría fractal que se estudia actualmente con mucho interés.

Si nos preguntaran cuántas puntos caben en el aula seguramente la respuesta sería infinitos. La misma pregunta sobre rectas probablemente merecería igual respuesta porque aceptamos que por cada punto pasan infinitas rectas. Sin embargo en ningún cuarto, por grande que sea,"cabe" por completo ni siquiera una recta: cualquier recta se extiende indefinidamente hacia cada lado. Algo parecido ocurre con los planos: por cada punto pasan infinitos planos pero ninguno cabe por completo en el aula.

Si una porción de una recta está contenida en un plano, podemos imaginar que toda la recta estará contenida en el plano: ni se "despega" la recta del plano, ni se "acaba" el plano antes que la recta.

En lo que sigue tomaremos como axiomas algunos de los hechos descriptos y comprobaremos que los demás son consecuencias lógicas de esos axiomas.

2. Lenguaje a utilizar

Naturalmente no podremos definir todos los entes que manejaremos.

Tomaremos como elementos primitivos, sin definirlos, a los puntos, las rectas y los planos. A la agrupación de todos los puntos lo llamaremos **espacio** y lo simbolizaremos con la letra griega Ω, que se lee "Omega".

En general, usaremos letras mayúsculas para nombrar a los puntos; minúsculas para las rectas y las semirrectas; y griegas para los planos y los semiplanos. (α: "alfa", β: "beta", γ: "gama", π: "pi", etc.)

Aceptaremos utilizar algunas expresiones diferentes con igual significado:

Si P es un punto, significan lo mismo:

- P pertenece a Ω,
- P es un punto de Ω,
- Ω contiene a P.

Y todo ello lo simbolizamos con: $P \in \Omega$.

Si r es una recta, significan lo mismo:

- r está incluida en Ω,
- r es una recta de Ω,
- Ω incluye a r,
- Ω contiene a r.

Y todo ello lo simbolizamos con: $r \subset \Omega$ o bien $\Omega \supset r$.

Si P es un punto y r es una recta, significan lo mismo:

- P pertenece a r,
- P es un punto de r,
- r contiene a P,
- r pasa por P.

Y todo ello lo simbolizamos con: $P \in r$.

Si P es un punto y π es un plano, significan lo mismo:

- P pertenece a π,
- P es un punto de π,
- π contiene a P,
- π pasa por P.

Y todo ello se simboliza con $P \in \pi$.

Si r es una recta y π es un plano, significan lo mismo:

- r está incluida en π,
- r es un recta de π,
- π incluye a r,
- π contiene a r.
- π pasa por r.

Y todo ello se simboliza con $r \subset \pi$ o bien $\pi \supset r$.

Advertimos que seremos muy cuidadosos para no confundir los símbolos $\in$: "pertenece a" y $\subset$ "está incluido en". Pero, de acuerdo a lo indicado más arriba, seremos menos estrictos al usar las expresiones "contiene a" o "está contenido en". Por ejemplo diremos que un plano contiene a "alguien" y ese alguien podrá ser un punto que pertenece al plano o una recta incluida en el plano.

Definiciones.

- Se dice que varios puntos están **alineados** o son **colineales** si existe alguna recta que los contiene. Si la recta es r se dice que los puntos están **alineados en** r.
- Se dice que varios puntos y/o rectas son **coplanares** si existe algún plano que los contiene. (O más formalmente, si existe algún plano al que todos esos puntos pertenecen y/o en el que todas esas rectas están incluidas).
- Se dice que varias rectas son **concurrentes** si existe algún punto perteneciente a todas las rectas.
- Se dice que dos rectas son **secantes** si tienen un único punto en común.
- Se dice que dos **rectas distintas** son **paralelas**, o que una de ellas es paralela a la otra, si son coplanares y su intersección es vacía. También se dice que cualquier recta es **paralela** a sí misma. Si a y b son rectas, usaremos la notación $a \parallel b$ que se lee "a paralela a b", para indicar que a y b son paralelas.
- Se dice que dos rectas son **alabeadas** si no existe ningún plano que las contenga. Es decir, dos rectas se dicen alabeadas si no son coplanares. (En algunos libros se usa la expresión rectas **que se cruzan** como sinónima de rectas **alabeadas**; pero hay que interpretar bien: esas rectas "se cruzan" pero no "se cortan". Para evitar confusiones nos limitaremos a utilizar la expresión "rectas alabeadas".)

  Nota. Es fácil distraerse y pretender simplificar la expresión "rectas para las que no existe ningún plano que las contenga" sustituyéndola por "rectas contenidas en distintos planos" o por "rectas sin puntos en común y contenidas en distintos planos". Tengamos presente que hay muchos planos diferentes que incluyen a una recta dada; y puede darse el caso de que haya dos planos distintos, cada uno conteniendo a una sola de las rectas y que también haya otro plano que las contiene a las dos. Por ejemplo, en una habitación con piso y techo "horizontales", la recta intersección del plano de una de las paredes con el plano del piso y la recta intersección de esa misma pared con el techo, cumplen: una está contenida en el plano del techo; la otra está contenida en el plano del piso; y no tienen puntos en común. Pero no son alabeadas porque el plano de la pared las contiene a ambas. Reiteramos: dos rectas se dicen alabeadas si no existe ningún plano que las contenga; es decir si no son coplanares.
- Se dice que dos planos distintos son **paralelos**, o que uno es **paralelo** al otro, si su intersección es vacía. También se dice que cualquier plano es **paralelo** a sí mismo.
- Se dice que una recta y un plano son **paralelos** (o que la recta es **paralela** al plano, o el plano **paralelo** a la recta) si o bien la recta está incluida en el plano o bien la recta y el plano tienen intersección vacía.

- Se dice que un plano y una recta son **secantes** si tienen un único punto en común, es decir su intersección es un conjunto unitario.
- Se dice que dos planos son **secantes** si su intersección es una recta.

Ejercicio 2.1.- Buscar en el aula elementos que sugieran rectas y o planos que ejemplifiquen las definiciones anteriores.

3. Primeros axiomas

Axioma 1. *El espacio, Ω, es un conjunto infinito de puntos.*

Axioma 2. *Los planos son subconjuntos propios del espacio y contienen por lo menos a una recta y a un punto no perteneciente a esa recta.*

Recordamos que un conjunto $\mathcal{A}$ es subconjunto de otro $\mathcal{B}$ cuando cualquier elemento de $\mathcal{A}$ es también elemento de $\mathcal{B}$. En ese sentido, el mismo $\mathcal{B}$ es subconjunto de $\mathcal{B}$; pero $\mathcal{B}$ no es un subconjunto propio de $\mathcal{B}$: Un subconjunto de $\mathcal{B}$ se llama **propio** si es distinto de $\mathcal{B}$. Que un plano es un subconjunto propio del espacio significa que hay puntos en el espacio que no pertenecen a ese plano. El axioma asegura que al menos hay un punto en esas condiciones. Y luego que incorporemos otros axiomas podremos justificar que hay infinitos de ellos.

Axioma 3. *Si dos puntos distintos de una recta pertenecen a un plano, entonces la recta está incluida en el plano.*

En el axioma hemos dicho "dos puntos distintos" cuando habría sido suficiente decir dos puntos: si son dos no pueden ser otra cosa que distintos. Sin embargo usaremos ese tipo de expresiones a efectos de estar alerta: usualmente, en matemática, no manejamos objetos sino nombres de objetos. Y bien puede ocurrir que un único objeto tenga más de un nombre.

Axioma 4. *Las rectas son subconjuntos propios de los planos que las incluyen y contienen al menos dos puntos distintos. Cada recta está incluida en algún plano.*

Axioma 5. *No es posible que la intersección de dos planos sea un conjunto unitario.*

Consecuencias inmediatas de los axiomas anteriores:

- Es una tarea imposible describir por extensión al espacio Ω.
- Ningún plano contiene a todos los puntos del espacio.
- Ninguna recta contiene a todos los puntos de ningún plano.
- Ninguna recta coincide con ningún plano.
- Ninguna recta contiene a todos los puntos del espacio.
- La intersección de una recta y un plano puede ser, únicamente, alguna de estas tres:
  - el conjunto vacío,
  - un conjunto con un único punto,
  - la misma recta.
- Si la intersección de dos planos no es vacía, entonces contiene por lo menos a dos puntos distintos.

Nota. Los axiomas enunciados hasta ahora hablan de rectas y planos estableciendo algunas características de esos subconjuntos de puntos; pero no aseguran que tales tipos de subconjuntos existan. Hasta ahora, lo único que está asegurado es la existencia de infinitos puntos del espacio; podría no existir ningún plano y el axioma 2 no sería de utilidad... Los próximos axiomas remedian eso.

Axioma 6. *Dados dos puntos distintos existe una única recta a la que los puntos pertenecen.* En otras palabras: *Dos puntos distintos* **determinan** *una recta que los contiene.*

Si los puntos son A y B, con $A \neq B$, a la recta determinada por ellos la denotaremos con $\overleftrightarrow{AB}$.

Axioma 7. *Dados una recta y un punto no perteneciente a la recta existe un único plano que los contiene.* En otras palabras: *Una recta y un punto no perteneciente a la recta determinan un plano que los contiene.*

Teorema. *Si dos rectas son distintas entonces su intersección puede ser vacía, o tener un único punto.*

Demostración. Llamemos a y b a las rectas de las que nos dicen que son distintas, es decir $a \neq b$. Necesitamos probar que al menos una de estas dos cosas ocurre:

$$a \cap b = \emptyset \qquad\qquad a \cap b \text{ es un conjunto unitario}$$

Lo haremos "por el absurdo", probando que si suponemos lo contrario llegamos a una contradicción:

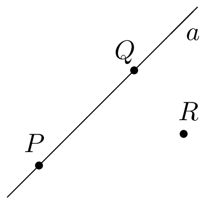
- Si no se cumpliera ninguna de ellas, es decir si la intersección no fuera vacía y tampoco fuera un conjunto unitario, existirían al menos dos puntos distintos, llamémosles P y Q en esa intersección:

  $$P \in a \cap b,\ Q \in a \cap b, \text{ es decir: } P \in a,\ P \in b,\ Q \in a,\ Q \in b. \text{ Y además } P \neq Q.$$

  Entonces, por el axioma 6 aplicado a los puntos P y Q existiría una única recta determinada por ellos: la recta $\overleftrightarrow{PQ}$. Es decir sería $a = \overleftrightarrow{PQ} = b$, en contradicción con que $a \neq b$.

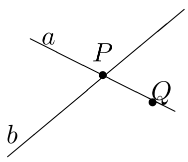
En consecuencia, debe cumplirse alguna de las dos condiciones anunciadas. ∎

Teorema. *Por tres puntos no alineados pasa un único plano.* En otras palabras: *Tres puntos no alineados determinan un plano que los contiene.*



Demostración. Sean P, Q y R los tres puntos no alineados. Necesariamente serán tres puntos distintos. Sea a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$. Como los puntos no están alineados debe ocurrir que $R \notin a$. Aplicando el axioma 7 a la recta a y al punto R conseguimos un plano, llamémosle α que contiene a la recta a y a R. Por contener a la recta a contendrá a cada uno de sus puntos como el P y el Q. Por lo tanto α contendrá a R, P y Q. Además es el único: si un plano β contiene a P, Q y a R, por el axioma 3 la recta $\overleftrightarrow{PQ}$, que existe por el axioma 6, está incluida en el plano β. Y el axioma 7 asegura un único plano en esas condiciones. ∎

Teorema. *Por dos rectas distintas concurrentes pasa un único plano.* En otras palabras: *Dos rectas secantes determinan un plano que las contiene.*



Demostración. Sean a y b las dos rectas distintas y P pertenecientes a ambas. Cualquier plano que incluya a ambas rectas, debe contener a los puntos de ellas. Al ser a y b conjuntos distintos existirá algún punto Q que pertenece a uno y no al otro. Sea por ejemplo Q perteneciente a a y no a b. Podemos aplicar el axioma 7 a la recta b y al punto Q para concluir que existe un único plano que contiene a ambos. Sea β tal plano. Como la recta a tiene dos puntos distintos P y Q en el plano β, también a está incluida en β, por el axioma 3. ∎

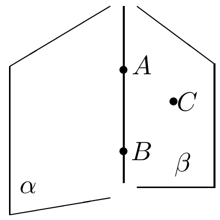
Teorema. *Si dos rectas son alabeadas entonces su intersección es vacía.*

Demostración.
Sean r y s dos rectas alabeadas es decir que no existe ningún plano que las contenga. Debe ocurrir que $r \neq s$ porque si fuera $r = s$ cualquier plano que contuviera a r también contendría a s. Tales planos existen por el axioma 4. Y ahora, si r y s fueran concurrentes, como también son distintas, podríamos aplicar el teorema anterior y encontraríamos un plano que las contiene, en contradicción con que las resctas son alabeadas. En consecuencia, $r \cap s = \emptyset$. ∎

Nota. No hemos demostrado nada respecto del recíproco de la proposición anterior: Si la intersección de dos rectas es vacía, puede ocurrir, en principio, que las rectas sean alabeadas. o que no lo sean.

Ejercicio 3.1.- Completar: *Si la intersección de dos rectas es vacía, entonces las rectas pueden ser ... o ...* (Se pretende una respuesta distinta de "coplanares" o "no coplanares")

Teorema. *La intersección de dos planos distintos puede ser el conjunto vacío o toda una recta.*

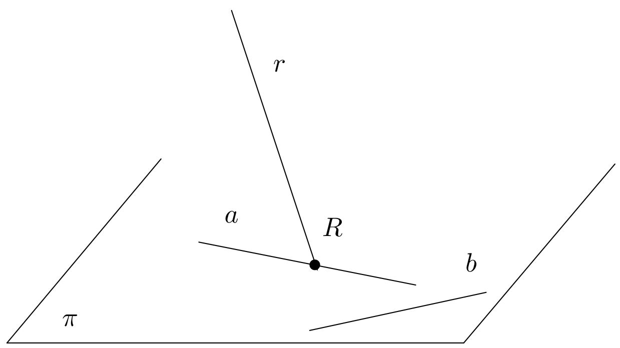


Demostración. Como el teorema propone dos alternativas podemos suponer que una no se cumple y justificar que, en ese caso, se cumple la otra.
Sean α y β los planos distintos. Si $\alpha \cap \beta$ no es vacía existirá al menos punto, llamémosle A perteneciente a ambos planos. Por el axioma 5 no puede ocurrir que $\alpha \cap \beta = \{A\}$, así que deberá existir otro punto B perteneciente a ambos. Por el axioma 6 tenemos la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Esa recta tiene dos puntos A y B en ambos planos, luego por el axioma 3 está incluida en esos planos. Es decir que $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \cap \beta$. Y no puede haber más puntos en esa intersección, porque si existiera un punto C perteneciente a ambos planos y no perteneciente a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ podríamos aplicar a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y al punto C el axioma 7 para concluir que los planos α y β coincidirían en contradicción con la hipótesis de que los planos eran distintos. ∎

Corolario. *Dados dos planos no paralelos existe una única recta incluida en ambos.* En otras palabras*, dos planos no paralelos determinan una recta incluida en ellos, es decir son secantes.*

Demostración. Si los planos no son paralelos, obligatoriamente serán planos distintos y su intersección no puede ser vacía. Entonces, de las dos posibilidades establecidas por el teorema anterior, sólo queda la posibilidad de una recta como intersección de ambos planos. ∎

Proposición. *Si una recta r y un plano π son secantes, entonces la recta no es paralela a ninguna de las rectas de π; en otras palabras, si s es una recta de π, necesariamente $r \nparallel s$.*



Demostración. Sea s una recta de π.
En primer lugar, $s \neq r$ por cuanto r es secante con π y $s \subset \pi$.
Sea $\{R\} = r \cap \pi$. Analizaremos los dos casos según que R pertenezca o no a s:

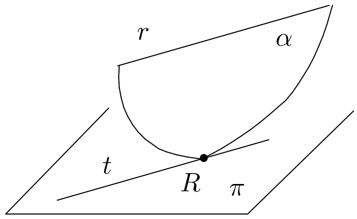
- **Caso** $R \in s$ • (En la ilustración, podemos tomar $s = a$). Es inmediato que $r \cap s = \{R\}$, por lo que las rectas son secantes y en consecuencia, no son paralelas.
- **Caso** $R \notin s$ • (En la ilustración podemos tomar $s = b$).

  Veamos, por el absurdo, que r y s son alabeadas, es decir no son coplanares: si existiera un plano α que contuviera a r y a s, contendría en particular a R y a s, por lo que por el axioma 7 α coincidiría con π. Como, por hipótesis, r no está incluida en π, no puede existir tal plano α. Así que r y s no son coplanares, y por lo tanto no pueden ser paralelas. ∎

Ya que una recta y un plano sólo pueden ser secantes o paralelos, se sigue inmediatamente que:

Corolario. *Si las rectas r y t son paralelas y $t \subset \pi$ entonces $r \parallel \pi$.*

Proposición. *Si la recta r es paralela al plano π, pero no está incluida en π, entonces por cada punto R de π pasa exactamente una paralela a r contenida en π.*



Nota. No estamos negando la posibilidad de que haya otras paralelas a r que pasen por R que no pertenezcan a π. Tampoco afirmamos nada acerca de las pararalelas a r, incluidas en π, para el caso en que la misma r está incluida en π. Recién cuando dispongamos del axioma de la paralela podremos justificar nuestras ideas intuitivas acerca de estos temas.

Demostración.

- **Justificación de unicidad:** • Si hay alguna recta en estas condiciones debe estar incluida en π y en el plano α determinado por r y R. Y la intersección de esos planos es exactamente una recta, llamémosla $t = \pi \cap \alpha$.
- **Justificación de existencia:** • La recta t cumple lo pedido, pues es coplanar con r (está incluida en α al igual que r) y $r \cap t = \emptyset$ (pues de otro modo, si $X \in r \cap t$ tendríamos $X \in r \cap \pi$ y por hipótesis, al ser r paralela a π, sin estar incluida en π, tenemos $r \cap \pi = \emptyset$). ∎

Ejercicio 3.2.- "Completar" la demostración anterior para indicar, en cada paso, cuales axiomas o teoremas se han utilizado.

Las proposiciones anteriores nos permiten asegurar, en relación a planos y rectas:

Teorema. (Condición de paralelismo plano-recta). *Un plano y una recta no incluida en el plano son paralelos si y sólo si el plano incluye alguna recta paralela a la dada.*

Y sobre rectas alabeadas, podemos asegurar:

Teorema. (Condición para rectas alabeadas). *Dos rectas son alabeadas si y sólo si existe un plano que incluye a una de las rectas y a solamente un punto de la otra, y ese punto no pertenece a la primera.*

Demostración. Sean a y b las rectas.

- **Si existe un plano π con $a \subset \pi$, $\pi \cap b = \{B\}$ y $B \notin a$:** • Demostremos, por el absurdo, que no hay ningún plano que incluya a ambas rectas. De existir un plano γ que incluyera a ambas rectas, a y b, debería ser $a \subset \gamma$ y $b \subset \gamma$; en particular, $B \in \gamma$; es decir γ estaría determinado por a y B al igual que π, por lo que $\gamma = \pi$. Pero $b \not\subset \pi$, ya que $b \cap \pi = \{B\}$, lo que contradice que $b \subset \gamma$. Es decir que no hay ningún plano que incluya a a y a b, así que a y b son alabeadas.
- **Si a y a b son alabeadas:** • Por lo pronto a y b no tienen ningún punto en común.

  Sea B un punto de de b. El plano γ determinado por a y B, no puede incluir a ambas rectas; pero incluirá a la recta a y contendrá a un único punto de b, el B.

  (En forma similar se puede conseguir un plano que incluya a b y que contenga un único punto de a).

  ∎

4. Relaciones de orden y similares. Llamado a la intuición

Estamos acostumbrados a trabajar con las relaciones de orden entre números reales:

$$<, \qquad \leq, \qquad >, \qquad \geq.$$

Y también acostumbramos ordenar otros conjuntos. Veamos algunos ejemplos.

Recta como conjunto ordenado

Nuestra idea sobre las rectas nos indica que podemos ordenar en forma "natural" a los puntos de cualquier recta. En un dibujo de la recta podemos marcar una flecha para sugerir ese orden, y hablar de la relación "precede a"que tiene por relación inversa a "sigue a ". Dependiendo del lugar desde donde estemos observando a la recta podremos pensar que el crecimiento es "hacia la derecha", o "hacia la izquierda", o "hacia arriba", etc.

Luego de elegido un orden para los puntos de una recta:

- Dados los puntos distintos A y B cumplirá una y sólo una de las condiciones siguientes:

$$A \text{ precede a } B, \qquad B \text{ precede a } A.$$

Esto nos permite decir que este orden es un **orden total**

- No existe un punto que preceda a todos los demás (No hay un primer punto).
- No existe un punto que sea precedido por todos los demás. (No hay un último punto).
- Dados dos puntos distintos A y B, existirán infinitos puntos entre A y B: es decir, si A precede a B entonces existirán infinitos puntos a los que A precede y que preceden a B.
- (**propiedad transitiva**): Si elegimos tres puntos distintos A, B y C de esa recta tales que

  $$A \text{ precede a } B \text{ y } B \text{ precede a } C$$

  entonces, irremediablente

  $$A \text{ precede a } C.$$

Relación de orden "tiene menos hermanos que"

Podemos ordenar al conjunto de alumnos de esta clase de acuerdo a la cantidad de hermanos que tiene cada uno, y pensar en la relación "tiene menos hermanos que", y en su inversa "tiene más hermanos que". En ese orden, dados dos alumnos, Pedro y Daniel, puede cumplirse una o ninguna de las condiciones siguientes:

Pedro "tiene menos hermanos que" Daniel
Daniel "tiene menos hermanos que" Pedro.

Pero también puede ocurrir que no se cumpla ninguna de las dos, si por ejemplo tanto Pedro como Daniel tienen cada uno dos hermanos. De este orden no se dice que sea un orden total.

Podríamos averiguar si hay algún alumno que tenga menos hermanos que todos los demás. Aunque no lo haya, sí habrá uno o más alumnos tales que ningún otro alumno tenga menos hermanos que ellos. También podríamos averiguar si hay algún alumno que tenga más hermanos que todos los demás. Aunque no lo haya, sí habrá uno o más tales que ningún otro alumno tenga más hermanos que ellos.

Lo que con seguridad no ocurrirá es que haya infinitos alumnos entre Pedro y Daniel en cuanto a la cantidad de hermanos.

Y sí se cumple la propiedad transitiva, por lo que sí es de orden:

Si Pedro "tiene menos hermanos que" Elsa y Elsa "tiene menos hermanos que" Javier entonces Pedro "tiene menos hermanos que" Javier.

Relación, que no es de orden, "ganó a"

Los equipos de fútbol suelen intervenir en campeonatos para determinar cuál es el mejor equipo del momento.

Aquí, dados dos equipos distintos se cumplirá una o ninguna de las condiciones siguientes:

A ganó a B, B ganó a A.

No se cumple ninguna de las dos si A y B empataron o si nunca tuvieron que jugar.

La relación "ganó a", que tiene por relación inversa "perdió ante", no nos sirve, ella sola, para ordenar a los equipos por cuanto no puede asegurarse la propiedad transitiva: es posible, aunque por supuesto no es obligatorio, que para tres equipos A,B y C se cumpla:

A ganó a B, B ganó a C, A no ganó a C.

y entonces la relación no sería transitiva.

En el campeonato apertura de fútbol juegan todos los equipos contra todos una sola vez y los resultados de los partidos permiten relacionar pares de equipos con la relación "ganó a".

Lo que suele hacerse para determinar al campeón es asignar puntos a los equipos según que haya empatado o ganado con lo cual la relación que sirve para ordenar a los equipos es la de "tiene más puntos que".

Cuando no se asignan puntos, como en la parte final del campeonato del mundo, con los cuatro semifinalistas, el único modo de que la posible falta de transitividad no sea un problema es que no jueguen todos contra todos: juegan dos equipos por un lado y otros dos por otro y los partidos se alargan hasta que haya un ganador. Y luego los dos ganadores juegan por el primero y el segundo puesto y los perdedores por el tercero y el cuarto.

Relación de orden “es múltiplo de”

Pensemos en esa relación definida en el conjunto de los naturales con el 0 agregado, N_0. Por ejemplo, 30 es múltiplo de 5 (es decir, 30 es igual a 5 por algún natural, $30 = 5 \times 6$); 22 es múltiplo de 2; 22 no es multiplo de 5. Aquí se cumple la propiedad transitiva: Si a es múltiplo de b y b es múltiplo de c entonces a es múltiplo de c.

Para esta relación hay un único número que es múltiplo de todos los otros que es el 0. Por ejemplo, 0 es múltiplo de 6 porque $0 = 6 \times 0$. Y también hay un único número, el 1, tal que todos son múltiplos de él.

También, “entre” el 0 y cualquier otro número siempre hay otro (y en consecuencia hay infinitos) relacionado con ellos: por ejemplo, entre el 0 y el 15 tenemos al 30 tal que 0 es múltiplo de 30 y 30 es múltiplo de 15. Y entre el 0 y el 30 tenemos al 60 etc. Pero no hay infinitos entre por ejemplo el 60 y el 15 (sólo hay uno, el 30); y entre el 3 y el 1 no hay ninguno.

5. Axioma de orden para la recta

Los axiomas aceptados hasta ahora no nos permiten describir cuáles son los órdenes naturales para los puntos de una recta; corresponden a conceptos primitivos. Agregaremos un axioma más para indicar algunas propiedades de esos órdenes. Pero antes daremos algunas definiciones.

Las expresiones **precede**, **sigue**, **primer, primero** y **último** son genéricas para cualquier orden.

Definiciones.

- Una relación binaria se dice **de orden** si cumple con la **transitividad**: La relación “rrr” es transitiva si

  $$A \text{ rrr } B \text{ y } B \text{ rrr } C \text{ implica } A \text{ rrr}$$

  (Si una relación binaria es de orden, también su relación inversa lo es)
- Dada una relación de orden “precede a” con su relación inversa “sigue a” en un conjunto $\mathcal{X}$,
  - si $A, B, C \in \mathcal{X}$, entonces se dice que A **está entre** B y C si A es distinto de B y C y se cumple una de estas dos condiciones:

B precede a A y A precede a C $\qquad$ B sigue a A y A sigue a C

En las cuatro ilustraciones, A está entre B y C.

(Cuando ilustramos la elección de un orden para una recta mediante una flecha, nos imaginamos recorriéndola en el sentido de la flecha; un punto B precederà a C en ese orden, si al recorrer la recta nos encontramos a B antes que a C) Hacemos notar que, aunque hemos necesitado un orden para definir la relación ternaria “estar entre”, esta relación no cambia si tomamos el orden inverso.

- Se dice que A es el primer elemento de $\mathcal{X}$, si A precede a cualquier otro elemento de $\mathcal{X}$.
- Se dice que H es el último elemento de $\mathcal{X}$, si H sigue a cualquier otro elemento de $\mathcal{X}$.

Axioma 8 (Del orden). *Los puntos de cada recta están ordenados según dos órdenes “naturales”, uno inverso del otro. Elegido uno cualquiera de esos órdenes naturales se cumple:*

(a). Propiedad de tricotomía. *Dados los puntos A y B ocurre una de las siguientes condiciones:*

$$A = B, \qquad A \text{ precede a } B, \qquad B \text{ precede a } A.$$

(b). No hay ningún punto que preceda a todos los demás. (No existe un primer punto).

No hay ningún punto que sea precedido por todos los demás. (No existe un último punto).

*(c). Dados dos puntos distintos, siempre hay al menos otro punto entre ambos (*Se llama propiedad de densidad).

Señalamos que el axioma no dice nada acerca de la propiedad transitiva porque esa propiedad queda sobreentendida en cualquier relación de orden.

Teorema. *Dada una recta, un orden natural para la misma, y un punto de la recta, hay infinitos puntos que lo preceden e infinitos puntos que lo siguen; y dados dos puntos distintos de la recta, hay infinitos puntos entre ellos.*

Demostración. (Idea de la demostración; no la formalizaremos. Se sugiere ir dibujando una figura ilustrativa).

- Si P es un punto de la recta, como no puede ser el primero (de otro modo se contradiría el inciso (b) del axioma del orden), existirá un punto A_1 que preceda a P. (A_1 se lee "A sub 1"). Pero A_1 tampoco puede ser el primero, así que existirá un punto A_2 que preceda a A_1 y que, en consecuencia, también precederá a P. Pero A_2 tampoco puede ser el primero ... Así que tendremos infinitos puntos que preceden a P.
- En forma similar se justifica que hay infinitos puntos que siguen a cualquier punto P.
- Si P y Q son dos puntos de la recta, por el inciso (c) del axioma del orden existirá un punto C_1 entre P y Q. Ahora, entre C_1 y Q existirá un punto, C_2, que también estará entre P y Q. Ahora entre C_2 y Q existirá un punto C_3 (distinto de los anteriores) que también está entre P y Q ... Se entiende que tendremos infinitos puntos entre P y Q. ∎

Teorema. *Cualquier recta tiene infinitos puntos.*

Demostración. Dada una recta, por el axioma 4, podemos conseguir un punto que pertenece a ella y por el teorema anterior hay infinitos puntos de la recta que lo preceden. ∎

Ejercicio 5.1.- Realizar una demostración, diferente a la dada, del teorema anterior.

Observamos que un modo de elegir uno de los dos órdenes y comunicar cuál es el elegido, es tomar dos puntos distintos e indicar cual de ellos precede al otro en el orden seleccionado.

6. Segmentos y semirrectas

Definiciones. Dada una recta r, uno de los dos órdenes para ella y un punto O de r, se llama **semirrecta** de r de **origen** O a cualquiera de los dos conjuntos siguientes: al formado por el punto O y todos los que le preceden en el orden elegido,

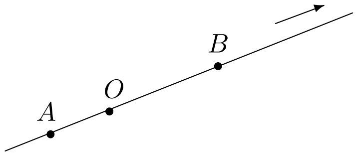
$$\{X \in r \mid X = O \text{ o } X \text{ precede a } O\},$$

y también al formado por el punto O y todos los que lo siguen en el orden elegido

$$\{X \in r \mid X = O \text{ o } X \text{ siguen a } O\}.$$

El punto O es el **origen de cualquiera de esas semirrectas** y diremos de las semirrectas que son **opuestas**, o que una es **opuesta de la otra**. Se entiende que el origen de una semirrecta
Si una de esas semirrectas de origen O contiene a H, distinto de O, la denotaremos con $\overrightarrow{OH}$.
Más concretamente, si A y B son puntos de r, y en el orden elegido,

$$\begin{array}{rl} \text{Si } A \text{ precede a } O: & \overrightarrow{OA} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in r \mid X = O \text{ o } X \text{ precede a } O\}; \\ \text{Si } B \text{ sigue a } O: & \overrightarrow{OB} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in r \mid X = O \text{ o } X \text{ sigue a } O\}; \\ & \overrightarrow{OA} \text{ es opuesta de } \overrightarrow{OB}. \end{array}$$



$A \in \overrightarrow{OA} = \{X \in r \mid X = O \text{ o } X \text{ sigue a } O\}$
$B \notin \overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son semirrectas opuestas.

De otro modo: Dados dos puntos distintos P y Q, consideramos para la recta $r = \overleftrightarrow{PQ}$, el orden natural en el que Q sigue a P. Así, llamamos semirrecta de origen P que contiene a Q, y la denotamos $\overrightarrow{PQ}$, al conjunto de puntos de r formado por P y todos los que siguen a P en el el orden mencionado.

Las definiciones anteriores descansan directamente en alguno de los órdenes de la recta. También es posible definir semirrectas usando la relación "estar entre":

Ejercicio 6.1.- Convencerse de que dados dos puntos distintos O y A, las semirrecta de origen O que contiene a A, y su opuesta pueden definirse:

$$\overrightarrow{OA} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \overleftrightarrow{OA} \mid X = O \quad \text{o} \quad X = A \quad \text{o} \quad X \text{ está entre } O \text{ y } A \quad \text{o} \quad A \text{ está entre } O \text{ y } X\}$$
$$(\text{Op. de } \overrightarrow{OA}) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \overleftrightarrow{OA} \mid X = O \quad \text{o} \quad O \text{ está entre } X \text{ y } A\}$$

Usaremos también **semirrecta abierta**, $\overset{\circ\quad}{\overrightarrow{AB}}$ que difiere de la semirrecta correspondiente $\overrightarrow{AB}$ únicamente en que el origen A, (ambas tienen el mismo origen A), pertenece a $\overrightarrow{AB}$ pero no pertenece a $\overset{\circ\quad}{\overrightarrow{AB}}$. Se cumple
$\overrightarrow{AB} \cap \overset{\circ\quad}{\overrightarrow{AB}} = \overset{\circ\quad}{\overrightarrow{AB}}$, $\qquad \overrightarrow{AB} \cup \overset{\circ\quad}{\overrightarrow{AB}} = \overrightarrow{AB}$.

Se entiende que el origen de una semirrecta abierta es el único punto que está entre cualquier punto de la semirrecta abierta y cualquiera de la semirrecta opuesta.

Otros conjuntos de interés son los **segmentos**, **segmentos abiertos** y **segmentos semiabiertos** todos ellos determinados (o casi determinados para el caso de segmentos semiabiertos) por dos puntos que se llaman **extremos de ellos)**. Los segmentos, segmentos abiertos y segmentos semiabiertos difieren entre sí por contener o no a sus extremos. Veamos las definiciones y notaciones correspondientes:

Definiciones. Dados dos puntos distintos P y Q,

- se llama **semirrecta abierta** de **origen** P que contiene a Q y se denota con $\overset{\circ\quad}{\overrightarrow{PQ}}$ al conjunto de puntos, de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$, que siguen a P en el orden en que Q sigue a P. Utilizando a la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$ podemos escribir:

$$\overset{\circ\quad}{\overrightarrow{PQ}} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{PQ} - \{P\}$$

- se llama **segmento** de **extremos** P y Q al conjunto de puntos formado por los puntos P y Q y todos los de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ que están entre P y Q. En símbolos puede escribirse:

$$\overline{PQ} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{PQ} \cap \overrightarrow{QP}$$

- se llama **segmento abierto** de **extremos** P y Q al conjunto de puntos formado por todos los puntos de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ que están entre P y Q. En símbolos puede escribirse:

$$\overset{\circ\;\;\circ}{\overline{PQ}} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ\quad}{\overrightarrow{PQ}} \cap \overset{\circ\quad}{\overrightarrow{QP}}$$

- se llama **segmento semiabierto** de **extremos** P y Q al conjunto de puntos formado por uno de los puntos P y Q y todos los de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ que están entre P y Q. Tenemos dos **segmentos semiabiertos** de extremos P y Q:
  - el abierto en P y cerrado en Q, que contiene a Q y que se denota con $\overset{\circ\quad}{\overline{PQ}}$ o bien con $\overset{\quad\circ}{\overline{QP}}$.
  - el cerrado en P y abierto en Q, que contiene a P y que se denota con $\overset{\quad\circ}{\overline{PQ}}$ o bien con $\overset{\circ\quad}{\overline{QP}}$.

En símbolos puede escribirse:

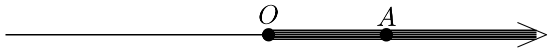
$$\overset{\circ\quad}{\overline{PQ}} \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ\quad}{\overrightarrow{PQ}} \cap \overrightarrow{QP}$$
$$\overset{\quad\circ}{\overline{PQ}} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{PQ} \cap \overset{\circ\quad}{\overrightarrow{QP}}$$

Ocasionalmente, se utilizan las palabras **semirrecta** y **segmento** en forma genérica para incluir también a la semirrecta abierta y a los segmentos abiertos y semiabiertos. En esos casos habrá que utilizar **semirrecta cerrada** en cuenta de nuestra **semirrecta** y **segmento cerrado** en cuenta de nuestro **segmento**.

Los cuatro segmentos genéricos nombrados tienen por extremos a P y a Q, pero no todos ellos contienen a P y a Q. P sólo pertenece a $\overline{PQ}$ y a $\overset{\quad\circ}{\overline{PQ}}$; y Q sólo pertenece a $\overline{PQ}$ y a $\overset{\circ\quad}{\overline{PQ}}$ Similarmente las dos semirrectas génericas $\overrightarrow{PQ}$ y $\overset{\circ\quad}{\overrightarrow{PQ}}$ tienen como punto origen a P; pero P sólo pertenece a $\overrightarrow{PQ}$.

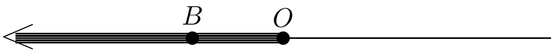
Nota. Al estudiante lector de estas notas: Si ya ha llegado a familiarizarse con la notación conjuntista le alcanzará con aprender las definiciones simbólicas y será capaz de explicarlas, llegado el caso, con sus propias palabras. Familiarizarse con esa notación requiere un esfuerzo importante, pero tiene como beneficio que hace mucho más sencillo el continuar aprendiendo ...

La figura siguiente muestra ejemplos de los conceptos definidos. Están "remarcados" los puntos del conjunto. En los casos de semirrectas abiertas o segmentos abiertos o semiabiertos se ha indicado con un redondelito el origen o los extremos que no pertenecen al conjunto.



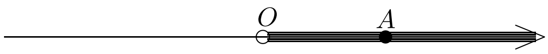
$\overrightarrow{OA}$

Semirrecta: origen O; contiene a A



$\overrightarrow{OB}$

Semirrecta: origen O; contiene a B



$\overset{\circ}{\overrightarrow{OA}} = \overrightarrow{OA} - \{O\}$

Semirrecta abierta: origen O; contiene a A

segmento $\overline{MN} = \overrightarrow{MN} \cap \overrightarrow{NM}$

segmento abierto $\overline{\mathring{P}\mathring{Q}} = \overset{\circ}{\overrightarrow{PQ}} \cap \overset{\circ}{\overrightarrow{QP}}$

Segmentos semiabiertos:

abierto en S: $\overline{R\mathring{S}} = \overrightarrow{RS} \cap \overset{\circ}{\overrightarrow{SR}} = \overline{\mathring{S}R}$

abierto en T: $\overline{\mathring{T}U} = \overset{\circ}{\overrightarrow{TU}} \cap \overrightarrow{UT} = \overline{U\mathring{T}}$

Nota. Cuando nos referimos a $\overleftrightarrow{AB}$ lo hacemos a la única recta que pasa por A y por B; pero, en relación a esa recta, los puntos A y B no tienen nada de especial. Tanto es así que, si C es otro punto de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, distinto de A y de B, ocurrirá que $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{CB}$; y si D es otro punto de la recta, distinto de los anteriores, también será $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$. Algo parecido y al mismo tiempo diferente sucede cuando nos referimos a una semirrecta, por ejemplo a la $\overrightarrow{PQ}$. De los puntos P y Q, el P, al que llamamos origen de la semirrecta, es especialísimo: P no está entre ningún par de puntos de la semirrecta; es el único de la semirrecta que cumple con esa condición; en cambio el papel que juega Q es simplemente el de pertenecer a la semirrecta. En símbolos:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \implies P = R \text{ pero } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \not\Longrightarrow Q = S$$

Para que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ es necesario y suficiente que: $P = R$ y además P, Q y S están alineados sin que ocurra que P esté entre Q y S.

Ejercicio 6.2.- Convencerse de: $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD} \not\Longrightarrow A = C$, $\quad \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD} \not\Longrightarrow A \neq C$.

Ejercicio 6.3.- Analizar intuitivamente qué tiene de especial el origen de una semirrecta abierta. Dar una definición para el origen de la semirrecta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OH}}$.

Ejercicio 6.4.- Enunciar una condición necesaria y suficiente para que $\overset{\circ}{\overrightarrow{PQ}} = \overset{\circ}{\overrightarrow{RS}}$.

Ejercicio 6.5.-

- Analizar intuitivamente qué tienen de especial los extremos de un segmento y enunciar una condición necesaria y suficiente para que $\overline{PQ} = \overline{RS}$.
- Lo mismo para segmentos abiertos y también para segmentos semiabiertos.

En algunos casos resultará conveniente ponerle un nombre "más corto"que por ejemplo $\overrightarrow{OA}$ a cierta semirrecta que debamos mencionar muchas veces; en esos casos utilizaremos alguna letra minúscula, a, b, etc. como nombre para ella.

7. Convexidad

Informalmente, la calidad de convexo tiene que ver con que el conjunto esté bien "relleno". Por ejemplo algunas gomas de borrar tienen formas correspondientes a conjuntos convexos y siguen siendo convexos aunque se vayan gastando por un uso natural. Si ignoramos los agujeritos de alguna porción de queso (cuidado, no estamos diciendo cualquier porción de queso), podríamos pensarlo como convexo; pero si no los ignoramos, deberemos llamarlo no convexo.

Para ponernos de acuerdo sobre qué es la convexidad necesitamos una definición. Aquí juegan un papel muy importante los segmentos.

Definición. Se dice que un conjunto de puntos, subconjunto de Ω, es **convexo** si sucede que cada vez que dos puntos distintos A y B pertenecen al conjunto, entonces el segmento $\overline{AB}$ está incluido en el conjunto. En símbolos: $\mathcal{X}$ es **convexo** si

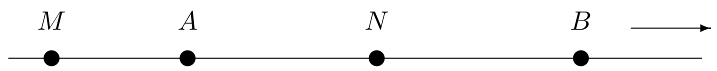
$$A \in \mathcal{X} \text{ y } B \in \mathcal{X} \implies \overline{AB} \subset \mathcal{X}$$

Ya podemos dar varios ejemplos geométricos de conjuntos convexos. No es difícil convencerse de que lo son los siguientes: El espacio Ω. Cualquier plano. Cualquier recta. Cualquier semirrecta y cualquier semirrecta abierta. Cualquier segmento y cualquier segmento abierto o semiabierto.

Veamos, por ejemplo, como justificar que

Proposición. *Cualquier semirrecta $\overrightarrow{MN}$ es convexa.*

Demostración.



Sean $A, B \in \overrightarrow{MN}$. Debemos probar que $\overline{AB} \subset \overrightarrow{MN}$, es decir que cualquier punto de $\overline{AB}$ pertenece también a $\overrightarrow{MN}$.

Como por hipótesis A y B pertenecen a $\overrightarrow{MN}$ podemos concentrarnos en demostrar que $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB} \subset \overrightarrow{MN}$. En símbolos,

$$X \in \overset{\circ\!-\!\circ}{AB} \implies X \in \overrightarrow{MN}$$

Elegiremos como orden para la recta el que corresponde a que M preceda a N. Supongamos que en ese orden A precede a B. Entonces los puntos de $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$ son los que siguen a A y preceden a B. En realidad, con tener en cuenta la primera parte, de que "siguen a A" ya nos alcanzará para completar la demostración. En la semirrecta hay un punto especial, el origen, así que nos conviene considerar dos casos según que A coincida o no con el origen M.

- **Caso** $A = M$**:** • Como los puntos de $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$ siguen a A, también seguirán a M y por lo tanto pertenecen a la semirrecta.
- **Caso** $A \neq M$**:** • Se cumplirá que A sigue a M. Por transitividad, como los puntos de $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$ siguen a A y A sigue a M, tendremos que los puntos de $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$ siguen a M y por lo tanto pertenecen a la semirrecta. ∎

También tenemos muchos ejemplos intuitivos de conjuntos no convexos. Por ejemplo los conjuntos de puntos de un plano que "dibujan" las letras O, C, M o el signo de admiración !. El conjunto de puntos del espacio que "forman" un vaso.

La justificación usual de que cierto conjunto de puntos $\mathcal{X}$ no es convexo, está sugerida por la definición: bastará exhibir dos puntos distintos A y B pertenecientes al conjunto $\mathcal{X}$ y un punto que pertenezca al segmento $\overline{AB}$ pero que no pertenezca a $\mathcal{X}$.

Hay ejemplos geométricos, muy sencillos, de conjuntos convexos, aunque cueste un poco convencerse intuitivamente de ello: el conjunto vacío y todos los conjuntos unitarios. Son convexos, puesto que no es posible mostrar dos puntos distintos pertenecientes a ellos . . . : no hay ningún segmento cuyos extremos pertenezcan a esos conjuntos sin que el segmento esté incluido.

Proposición. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son conjuntos convexos entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Sean M y N dos puntos distintos de $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. (Si no existieran tales puntos en $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ no necesitaríamos probar nada).

Debemos probar que $\overline{MN} \subset \mathcal{C}$.

- $M, N \in \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \implies M, N \in \mathcal{A} \implies$ (porque $\mathcal{A}$ es convexo)$\overline{MN} \subset \mathcal{A}$.
  En forma similar, $M, N \in \mathcal{C} \implies \overline{MN} \subset \mathcal{B}$.
- Si $\overline{MN} \subset \mathcal{A}$ y $\overline{MN} \subset \mathcal{B}$ entonces, por propiedades de la intersección de conjuntos, $\overline{MN} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{C}$. ∎

Ejercicio 7.1.- Encontrar ejemplos de conjuntos convexos cuya unión sea convexa y también ejemplos de conjuntos convexos cuya unión no sea convexa.

Ejercicio 7.2.- ¿Hay ejemplos de conjuntos convexos cuya intersección no sea un conjunto convexo? ¿Por qué?

Capítulo II

Separación en el plano y consecuencias

1. LLamado a la intuición

Según nuestros conceptos sobre rectas, planos y espacio, estos se extienden indefinidamente. Podemos imaginar que se pueden partir "a la mitad" de muchas maneras: Si sacamos un punto cualquiera de una recta, el resto de los puntos nos queda partido en dos "mitades", que llamamos semirrectas abiertos. Si sacamos una recta cualquiera de un plano, el resto de los puntos queda partido en dos "mitades" que llamamos semiplanos abiertos. Si sacamos un plano del espacio, el resto de los puntos queda partido en dos semiespacios abiertos.

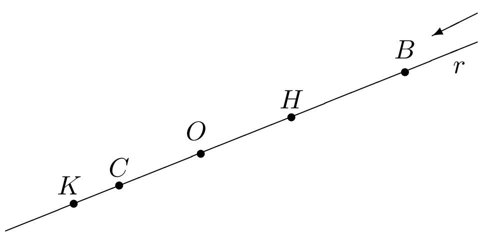
En cambio si a un segmento lo partimos quitándole un punto que no sea el punto medio no lo "veremos" partido en dos "mitades".

2. Separación en rectas, planos y espacio

Lo que conocemos sobre los órdenes naturales de los puntos de una recta, y que hemos formalizado con el axioma del orden (pág. 8), y las definiciones dadas de segmentos y conjuntos convexos nos permiten plantear un teorema cuya importancia, para este curso, es que tiene un enunciado parecido al del próximo axioma que veremos.

Teorema. (De separación de los puntos de una recta) *Dado un punto O perteneciente a una recta r, el conjunto de todos los puntos de la recta, distintos de O, se divide en dos subconjuntos no vacíos, convexos, disjuntos, tales que si B pertenece a uno de ellos y C pertenece al otro entonces el segmento $\overline{BC}$ contiene a O.*

La demostración sólo requiere interpretar el enunciado, y, luego de intuir que los subconjuntos convexos que menciona el axioma son las dos semirrectas abiertas de origen O, hacer uso del axioma del orden y de las definiciones de semirrectas abiertas y de segmentos para completar la prueba. Recordamos que se dice que dos conjuntos son **disjuntos** si no tienen ningún elemento en común, es decir, si su intersección es vacía.



Demostración. Sean H y K dos puntos de la recta r con O entre H y K. Veremos que el conjunto de puntos r se parte en tres subconjuntos disjuntos: $\{O\}$, $\overset{\circ}{\overrightarrow{OH}}$ y $\overset{\circ}{\overrightarrow{OK}}$.

- $r = \{O\} \cup \overset{\circ}{\overrightarrow{OH}} \cup \overset{\circ}{\overrightarrow{OK}}$
- $O \notin \overset{\circ}{\overrightarrow{OH}}$
- $O \notin \overset{\circ}{\overrightarrow{OK}}$

- $\overset{\circ}{\overrightarrow{OH}} \cap \overset{\circ}{\overrightarrow{OK}} = \emptyset$
- $\overset{\circ}{\overrightarrow{OH}}$ y $\overset{\circ}{\overrightarrow{OK}}$ son convexos.
- Sean B y C tales que $B \in \overset{\circ}{\overrightarrow{OH}}$ y $C \in \overset{\circ}{\overrightarrow{OK}}$. Veamos que el segmento $\overline{BC}$ contiene a O.
  Supongamos elegido el orden en el que H precede a O; en ese orden, también O precede a K. Entonces B precede a O y O precede a C. Por lo tanto O está entre B y C, es decir $O \in \overline{BC}$. ∎

Cuando decimos que dos figuras **se intersectan** o que una figura **intersecta** o **corta** a otra queremos decir que su intersección es no vacía; o de otro modo, que tienen algún punto en común.

Observemos que significan lo mismo, en relación al teorema,

- el segmento $\overline{BC}$ contiene a O
- $\overline{BC} \cap \{O\} \neq \emptyset$
- La intersección $\overline{BC} \cap \{O\}$ es un conjunto unitario.
- el segmento $\overline{BC}$ intersecta a $\{O\}$

Los modos segundo y cuarto son mucho más rebuscados que el primero y no tiene sentido usarlos en ese teorema; su única ventaja es que es más fácil generalizarlos para enunciar propiedades de separación del plano o del espacio.

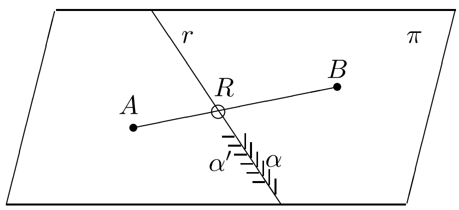
Definiciones.

- Se dice que dos o más puntos están **a un mismo lado de un punto** O si pertenecen todos a una misma semirrecta de origen O.
- Se dice que dos puntos están **a distinto lado de un punto** O si pertenecen a semirrectas opuestas de origen O.

La generalización del teorema anterior, para pasar de la recta al plano, debemos enunciarla como axioma porque no es una consecuencia lógica de los anteriores axiomas.

Axioma 9 (De separación de los puntos de un plano). *Dada una recta r incluida en un plano, el conjunto de todos los puntos del plano que no pertenecen a r se divide en dos subconjuntos no vacios, convexos, disjuntos, tales que si A pertenece a uno de ellos y B pertenece al otro entonces el segmento $\overline{AB}$ intersecta a la recta r.*

En este caso, en que estamos pensando en un segmento y una recta tales que el segmento no está incluido en la recta, la intersección del segmento y la recta tendrá un único punto, es decir existirá un punto R tal que $\overline{AB} \cap r = \{R\}$.



Nota. El axioma dice, expresamente, lo que ocurre con un segmento $\overline{AB}$ cuando A y B pertenecen a distintos subconjuntos de los nombrados por el axioma; y parece no decir nada de lo que ocurre con el segmento cuando ambos puntos pertenecen al mismo subconjunto. Sin embargo sí nos dice algo para ese caso: que ambos subconjuntos son convexos; y como consecuencia inmediata de ello y de que no contienen puntos de r, si A y B pertenecen ambos a uno de esos subconjuntos entonces $\overline{AB}$ está incluido en ese subconjunto y $\overline{AB} \cap r = \emptyset$.

Definiciones.

- Dada una recta r de un plano π,
  - a cada uno de los dos subconjuntos convexos del axioma 9, de separación, aplicado a π y a r se le llama **semiplano abierto** de borde r, y se dice de ellos que son **semiplanos abiertos opuestos**, o que uno es **opuesto** del otro.

- ◦ A la recta r se la llama **borde** o **frontera de** cada uno de esos semiplanos abiertos.
  En la figura anterior uno de los semiplanos abiertos se visualiza como el conjunto de puntos arriba y a la derecha de la recta r, llamémosla α y el otro como el conjunto de puntos por debajo y a la izquierda de la recta r, llamémosle α'; y se cumple $B \in \alpha$ y $A \in \alpha'$.
  Usualmente, para sugerir a esos semiplanos abiertos, en lugar de rayar o sombrear toda la región —¡no terminaríamos nunca— rayaremos sólamente una pequeña zona cerca del borde del semiplano; todo ello a efectos de permitir que se vean claramente en la figura otros puntos y rectas que puedan interesarnos.

- A la unión de cada semiplano abierto con su borde se le llama **semiplano**, o si se desea darle un adjetivo **semiplano cerrado**.
- Dos semiplanos, es decir semiplanos cerrados, se dicen **semiplanos opuestos** o **semiplanos cerrados opuestos** si los correspondientes semiplanos abiertos lo son.
- A la recta que es borde de un semiplano abierto también se le llama **borde** o **frontera** del semiplano (cerrrado).
- Se dice que dos o más puntos están **a un mismo lado de una recta** si pertenecen a un mismo semiplano abierto de borde la recta.
- Se dice que dos puntos están **a distinto lado de una recta** si los puntos pertenecen a semiplanos abiertos opuestos de borde la recta.

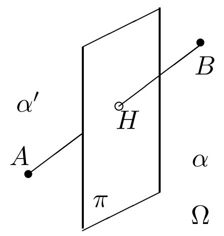
De acuerdo a las definiciones, y como consecuencia del axioma de separación,

Proposición. *Dos puntos no pertenecientes a una recta r están a distinto lado de la recta si y sólo si el segmento determinado por los puntos intersecta a r. Y dos o más puntos coplanares con una recta r están a un mismo lado de la recta r si sucede que los segmentos determinados por cada par de puntos no intersecta a r.*

Antes de estudiar las propiedades de los semiplanos que nos permitirán definir interiores de algunas figuras, enunciaremos una generalización del axioma de separación del plano que involucra a todo el espacio.

Teorema. (De separación de los puntos del espacio) *Dado un plano π, el conjunto de todos los puntos del espacio Ω que no pertenecen a π se divide en dos subconjuntos no vacíos, convexos, disjuntos, tales que si A pertenece a uno de ellos y B pertenece a otro entonces el segmento $\overline{AB}$ intersecta a π; es decir existirá un punto H tal que $\overline{AB} \cap \pi = \{H\}$.*

No lo demostraremos aquí ni aconsejaremos a los alumnos que lo intenten. Si de todos modos alguno desea hacerlo, seguramente será preferible que lo haga luego de terminar este tema.
Lo hemos llamado teorema porque se puede demostrar utilizando los axiomas disponibles; en especial el axioma 5 que dice *"No es posible que la intersección de dos planos sea un conjunto unitario"*. En algunos libros el teorema recién enunciado aparece como axioma y entonces se puede demostrar como teorema a nuestro axioma 5.



Definiciones.

- Dado un plano π,
  - ◦ a cada uno de los subconjuntos convexos del teorema de separación se le llama **semiespacio abierto** de **borde** el plano π. Y se dice de ellos que son **semiespacios abiertos opuestos** o que uno es **opuesto** del otro.
    En la figura se visualiza a uno de ellos, nombrado α, como el conjunto de puntos a la derecha del plano π y al otro, nombrado α', como el conjunto de puntos a la izquierda de π.
  - ◦ Se llama **borde** o **frontera de** esos semiespacios abiertos, al plano π.
- A la unión de cada semiespacio abierto con su borde se le llama **semiespacio**, o si se desea darle un adjetivo **semiespacio cerrado**.
- Al plano que es borde de un semiespacio abierto se le llama también **borde** o **frontera del** semiespacio o semiespacio cerrado.

- Dos semiespacios —semiespacios cerrados— se dicen **opuestos** o que uno es **opuesto** del otro si los semiespacios abiertos correspondientes son opuestos.
- Se dice que dos o más puntos están **a un mismo lado de un plano** si pertenecen a un mismo semiespacio abierto de borde el plano.
- Se dice que dos puntos están **a distinto lado de un plano** si los puntos pertenecen a semiespacios abiertos opuestos de borde el plano.

De acuerdo a las definiciones,

Proposición. *Dos puntos están a distinto lado de un plano π, al que no pertenecen, si y sólo si el segmento determinado por los puntos intersecta a π. Y dos o más puntos están a un mismo lado de π si sucede que los segmentos determinados por cada par de puntos no intersecta a π.*

3. Semiplanos

Muy frecuentemente haremos abuso del lenguaje, dado que no hay peligro de confusiones, hablando de semiplano de borde cierto segmento o cierta semirrecta cuando deberíamos referirnos a la recta que incluye al segmento o a la semirrecta. Y también hablaremos de semiespacio de borde cierto semiplano o cierto triángulo cuando deberíamos decir de borde el plano que incluye al semiplano o al triángulo.

Nota. Insistimos en que con "semiplano" a secas nos referimos a la unión del semiplano abierto junto con su borde.

Podemos recordar, en forma resumida, al axioma de separación, diciendo que cada recta de un plano determina dos semiplanos del mismo.

Si r es una recta y A es un punto que no pertenece a r, sabemos que hay un único plano que los contiene. La recta r divide a ese plano en dos semiplanos; el punto A nos permitirá distinguir cada uno de esos semiplanos determinados por r: Hablaremos del semiplano, ya sea cerrado o abierto, de borde r que contiene a A y del semiplano, ya sea cerado o abierto, opuesto a él.

Nota. Si estamos trabajando con todo el espacio, y el punto A no pertenece a la recta r, la expresión "semiplano de borde r que no contiene al punto A" podría aplicarse a cualquiera de los infinitos semiplanos que no contienen a A; sin embargo la costumbre nos hace pensar que con esa expresión nos referimos exactamente al opuesto del semiplano que contiene a A. Sin duda, será preferible decir, expresamente, semiplano opuesto al de borde r que contiene a A.

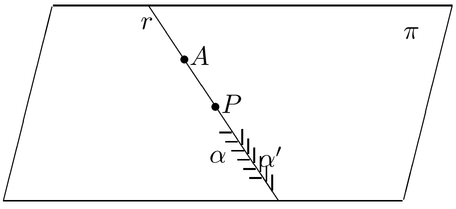
Para nombrar a los semiplanos usaremos letras griegas; el misma tipo de letras que también usamos para nombrar a planos.

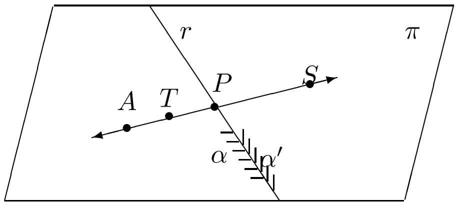
Es inmediato, en virtud del axioma de separación, que los semiplanos abiertos son convexos. Veremos que los semiplanos, es decir los semiplanos cerrados, también lo son. Recordamos que necesitaremos asegurarnos de que dos puntos cualesquiera de un semiplano determinan un segmento formado por puntos del semiplano. Claro que si esos dos puntos pertenecen al semiplano abierto, ya sabemos que se cumple porque los semiplanos abiertos, por el axioma de separación, son convexos. Y también se cumple si pertenecen ambos al borde, porque las rectas también son conjuntos convexos. Sólo queda el caso en que un punto pertenece al borde y el otro punto pertenece al semiplano abierto. Para este caso nos es muy útil el teorema que veremos a continuación.

El lector no debiera asombrarse si no entiende porqué hay que demostrar cosas tan "evidentes" como las de este capítulo; después de todo, recién en el siglo XIX se dieron cuenta los matemáticos de que era necesario hacerlo. Por otro lado, no es grave si los estudiantes de primer año aceptan estos teoremas sin estudiar su demostración.

Teorema. *Sean α y α' semiplanos opuestos de borde r; α y α' incluidos en un plano π. Cada semirrecta de π con origen en uno de los puntos de r está contenida en alguno de los semiplanos α o α'. Más aún, si P es un punto de r, y una semirrecta de extremo P está contenida en α, entonces la semirrecta opuesta está contenida en el semiplano opuesto α'. (Nos estamos refiriendo a semirrectas cerradas y a semiplanos cerrados).*

Demostración. Sea $P \in r$ y $A \in \pi$, con $A \neq P$.





- Si $A \in r$ entonces $\overrightarrow{PA} \subset r$ con lo cual $\overrightarrow{PA} \subset \alpha$ y también $\overrightarrow{PA} \subset \alpha'$.

- $A \in \alpha - r$. Veamos que $\overrightarrow{PA} \subset \alpha$ y que la semirrecta opuesta está contenida en el semiplano opuesto. Como ya sabemos que P y A pertenecen a α sólo debemos probar que cualquier otro T de la semirrecta pertenece a α.
  - Sea $T \in \overrightarrow{PA} - \{P, A\}$. Por el axioma de separación del plano aplicado al plano α_o y a la recta r, T debe pertenecer a r o a alguno de los semiplanos abiertos de borde r. Pero a la recta r no puede pertenecer pues $T \neq P$; y si perteneciera al semiplano abierto opuesto al que contiene a A debería ocurrir que $\overline{TA}$ intersectara a r en el único punto posible P y en consecuencia P estaría entre A y T en contradicción con que $T \in \overrightarrow{PA}$. Así que T debe estar del mismo lado de r que el punto A, es decir $T \in \alpha$. Como eso vale para todo $T \in \overrightarrow{PA}$ tenemos que $\overrightarrow{PA} \subset \alpha$.
  - Sea p' la semirrecta opuesta de la $\overrightarrow{PA}$ y $S \in p'$ con $S \neq P$. Entonces P está entre A y S con lo cual $P \in \overline{TS}$ y $\overline{TS} \cap r = \{P\} \neq \emptyset$ por lo que S y A pertenecen a distintos semiplanos abiertos de borde r, es decir $S \in \alpha'$. Como esto vale para cualquier punto S de p' concluimos que $p' \subset \alpha'$ ∎

Corolario. *Los semiplanos son conjuntos convexos.*

Demostración. Sea α un semiplano de borde r. Llamemos β al correspondiente semiplano abierto de borde r. Es decir

$$\alpha = \beta \cup r.$$

Sean M y N puntos de α. Nuestro objetivo es probar que el segmento $\overline{MN}$ está incluido en α. Dividiremos el estudio en varios casos según que los puntos M y N pertenezcan a β o a r.

- Si M y N pertenecen ambos a β, como β es un semiplano abierto y los semiplanos abiertos son convexos, resultará que $\overline{MN} \subset \beta$; y como $\beta \subset \alpha$ será también $\overline{MN} \subset \alpha$.
- Si M y N pertenecen ambos a r, como r es una recta y las rectas son conjuntos convexos, resultará que $\overline{MN} \subset r$; y como $r \subset \alpha$ tendremos que $\overline{MN} \subset \alpha$.
- Si $M \in r$ y $N \in \beta = \alpha - r$: Por el teorema anterior se cumple que $\overrightarrow{MN} \subset \alpha$. Como además $\overline{MN} \subset \overrightarrow{MN}$ concluimos que $\overline{MN} \subset \alpha$.
- Si $N \in r$ y que $M \in \beta = \alpha - r$: Este caso es "esencialmente" el mismo que el anterior. ∎

Puntos interiores y exteriores en la geometría elemental

Advertimos a los estudiantes que en cursos posteriores de análisis pueden encontrar definiciones no coincidentes con las que daremos aquí. Por ejemplo en este curso diremos que el centro de una circunferencia es un punto interior a la misma, aunque sabemos que el centro no pertenece a la circunferencia: sí pertenece al círculo pero no pertenece a la circunferencia. En análisis, una —no la única— de las condiciones que se pide para hablar de punto interior a un conjunto es que el punto pertenezca al conjunto. Evitar, en este curso, esos cambios en el significado de las palabras es posible; pero exigiría utilizar frases más largas... No lo haremos. Este asunto nos servirá como un ejemplo más de que el significado de las palabras depende del contexto en que se las use.

Generalmente, para este curso, y en relación a algunos de los conjuntos de puntos ya conocidos, hablaremos de:

- **puntos de** $\mathcal{X}$, cuando $\mathcal{X}$ es un plano, recta, semiplano, semirrecta, segmento, ángulo, triángulo, etc., para indicar puntos pertenecientes a $\mathcal{X}$.
- **puntos interiores de** $\mathcal{X}$: esto requerirá definiciones especiales.

  Por ejemplo llamaremos puntos interiores de un segmento genérico de extremos A y B a los pertenecientes a $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$.
- **puntos exteriores de** $\mathcal{X}$ para indicar: si la figura está incluida en un plano, serán los que siendo coplanares con la figura, no pertenezcan a la misma ni tampoco sean interiores. Si la figura no está incluida en un plano, serán exteriores todos los puntos que no pertenezcan a la figura ni tampoco sean interiores.

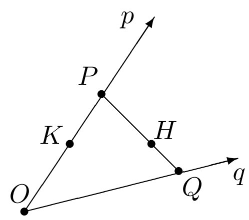
4. Angulos y sectores angulares

Daremos varias definiciones relativas a ángulos.

Nota. Los estudiantes no deben sentirse obligados, en general, a recordar palabra por palabra estas definiciones u otras de los cursos matemáticos; más bien es conveniente que, en lo posible, luego de haberlas entendido y de haber prestado atención a los detalles delicados que puedan tener, sean capaces de evocar o imaginar uno o más ejemplos y contraejemplos y a partir de ellos puedan reconstruir la definición. Naturalmente, las primeras veces será conveniente comparar la definición propia con la "oficial" para ver si significan lo mismo ... En particular, es posible que en otros cursos se trabaje con definiciones diferentes para ángulos, triángulos etc., llamando ángulo a lo que nosotros llamaremos sector angular y triángulo a lo que nosotros llamaremos región triangular.

Definiciones. Se llama **ángulo** a la unión de dos semirrectas distintas de origen común y no opuestas. Cada una de las semirrectas se llama **lado del ángulo** y el origen común se llama **vértice del ángulo**. Si las semirrectas lados del ángulo son $p = \overrightarrow{OP}$ y $q = \overrightarrow{OQ}$ denotaremos al ángulo como $\widehat{POQ}$, $\widehat{QOP}$, $\widehat{pq}$ o $\widehat{qp}$.

$$\widehat{pq} = \widehat{POQ} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP} \cup \overrightarrow{OQ}$$



$$P, O, Q, K \in \widehat{POQ}$$
$$H \notin \widehat{POQ}$$
$$\overline{PQ} \not\subset \widehat{POQ}$$

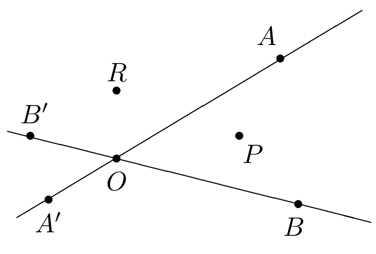
Nota. Observamos que la notación $\widehat{POQ}$ sólo tiene sentido o significado en el caso en que P, O, y Q son tres puntos no alineados.

Es inmediato que, con la definición dada, ningún ángulo es convexo. Si el ángulo es $\widehat{POQ}$, seguro que tanto P como Q pertenecen a $\widehat{POQ}$ y sin embargo el segmento $\overline{PQ}$ no está incluido en $\widehat{POQ}$ ya que los puntos de ese segmento que están entre P y el Q no pertenecen al ángulo $\widehat{POQ}$ (de otro modo, los puntos P, Q, O estarían alineados en contradicción con que las semirrectas que son lados del ángulo eran distintas y no opuestas).

Lo pedido para las semirrectas p y q implica que no sean colineales. Más adelante levantaremos la restricción de que las semirrectas no sean colineales y hablaremos también de ángulo aun cuando p y q sean colineales: si $p = q$ tendremos un **ángulo nulo**; y si p y q son opuestas opuestas, tendremos un **ángulo llano**. Estos ángulos especiales sí resultarán conjuntos convexos ya que son simplemente una semirrecta cuando $p = q$ y una recta cuando p y q son semirrectas opuestas.

- Decimos que dos ángulos son **opuestos por el vértice** si los lados de uno de ellos son semirrectas opuestas de los lados del otro.
- Decimos que dos ángulos son **adyacentes** si tienen un lado común y los otros lados son semirrectas opuestas.

  Observamos que dos rectas secantes, es decir dos rectas concurrentes y distintas, determinan cuatro ángulos; uno cualquiera de los ángulos es opuesto por el vértice de otro de los ángulos y es adyacente con cualquiera de los dos restantes.



$\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'OB'}$ son opuestos por el vértice

$\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'OB}$ son adyacentes

$A \in \widehat{AOB}$

$O \in \widehat{AOB}$

$P \notin \widehat{AOB}$

P es interior al ángulo $\widehat{AOB}$

$A' \notin \widehat{AOB}$

$R \notin \widehat{AOB}$

A', B' y R son exterioresal ángulo $\widehat{AOB}$

- Se llama **interior de un ángulo** $\widehat{AOB}$ a la intersección del semiplano abierto de borde $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene a B con el semiplano abierto de borde $\overleftrightarrow{OB}$ que contiene a A.
- Se llama **punto interior de un ángulo** a cualquier punto perteneciente al interior del mismo.
- Se llama **semirrecta interior de un ángulo** AOB a cualquier semirrecta de origen O, vértice del ángulo, que contenga un punto interior. (Notar que una semirrecta interior no está totalmente incluida en el interior del .angulo: su origen no es un punto interior).
- Se llama **sector angular** del ángulo $\widehat{AOB}$ a la unión del ángulo con su interior. Insistimos en que en muchos libros de geometría, se llama "ángulo" a lo que en este curso llamamos sector angular.
- Se llama **punto exterior de un ángulo** a cualquier punto, coplanar con O, A y B, que no pertenezca ni al ángulo ni a su interior.

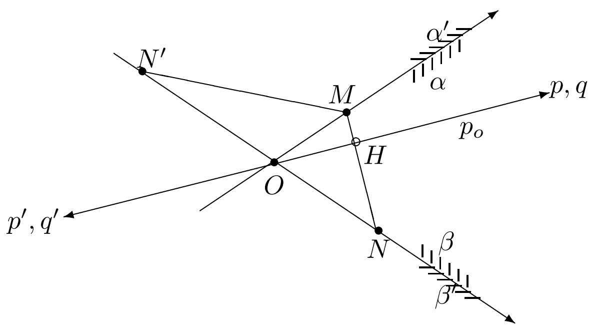
- Se llama **exterior de un ángulo** al conjunto de todos los puntos exteriores al ángulo.

Como la intersección de conjuntos convexos es convexo (ver demostración en pág. 12), podemos asegurar que tanto el interior de cualquier ángulo como cualquier sector angular son conjuntos convexos. En cambio, el exterior de un ángulo—nos referimos a un ángulo no nulo ni llano—no es un conjunto convexo. (Se deja como ejercicio).

Teorema. *Dado un ángulo y una semirrecta interior al ángulo, entonces la semirrecta intersecta a cualquier segmento que se apoye en los lados del ángulo.*

Demostración. La propiedad es evidente si uno de los extremos del segmento coincide con el vértice del ángulo. Así que en lo que sigue supondremos que no es ese el caso que nos ocupa.
Sea O el vértice del ángulo y M y N los extremos del segmento, distintos del O. El ángulo lo podemos nombrar con $\widehat{MON}$. Sea α el semiplano abierto de borde $\overleftrightarrow{OM}$ que contiene a N y α' su opuesto. Y sea β el semiplano abierto de borde $\overleftrightarrow{ON}$ que contiene a M, y β' su opuesto.
Sea p la semirrecta interior, por lo tanto con origen O. Sea q la semirrecta abierta correspondiente a p, es decir $q = p - \{O\}$; y sea q' su opuesta. Se cumple $q \subset \alpha \cap \beta$ y $q' \subset \alpha' \cap \beta'$. Sea p_o la recta que contiene a p (y a q y sus opuestas).
La idea central de la demostración es justificar que M y N están a distinto lado de la recta p_o; utilizaremos un punto auxiliar N' con O entre N y N'. Resultará que N' está del mismo lado de p_o que M y de distinto lado de p_o que N. La justificación de que M y N' están del mismo lado de p_o se apoya, en las propiedades de los semiplanos α, α', β y β'.

- N' está del mismo lado de p_o que M porque—ver anotaciones de la figura—el segmento $\overline{N'M}$ no corta a p_o ya que no corta ni a la semirrecta q, ni a la q'; y tampoco contiene al origen de ellas. (Como ni N' ni M pertenecen a p_o alcanza con que nos ocupemos de $\overset{\circ\!-\!\circ}{N'M}$).



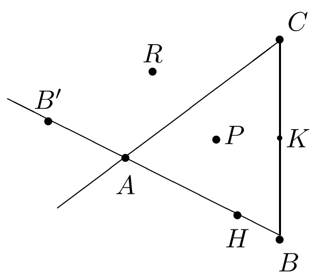
$\overset{\circ\!-\!\circ}{N'M} \cap q = \emptyset$ porque
$\overline{N'M} \subset \overset{\circ\!\longrightarrow}{MN'} \subset \alpha'$ y $q \subset \alpha$,
con α y α' disjuntos.
$\overset{\circ\!-\!\circ}{N'M} \cap q' = \emptyset$ porque
$\overset{\circ\!-\!\circ}{N'M} \subset \overset{\circ\!\longrightarrow}{N'M} \subset \beta$
y $q' \subset \beta'$, y β y β' son disjuntos.
$O \notin \overset{\circ\!-\!\circ}{N'M}$ porque
O, N' y M no están alineados.

En conclusión, M y N' están del mismo lado de p_o es decir pertenecen a un mismo semiplano de borde p_o.

- N' y N están a distinto lado de p_o porque $\overline{N'N} \cap p_o = \{O\} \neq \emptyset$.

Por lo tanto M y N pertenecen a semiplanos opuestos de borde p_o. Entonces por el axioma de separación, el segmento $\overline{MN}$ intersectará a la recta p_o en un punto llamémosle H. Como M y N pertenecen ambos a $\alpha \cap \beta$ lo mismo ocurre con H y entonces H debe pertenecer a la semirrecta p y no a su opuesta. ∎

5. Triángulos y regiones triangulares



A, H, $K \in \overset{\triangle}{ABC}$
P, B', $R \notin \overset{\triangle}{ABC}$
P es interior al tríangulo $\overset{\triangle}{ABC}$
B', R son exteriores al $\overset{\triangle}{ABC}$
$\widehat{BAC}$ es uno de los tres ángulos del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$
$\widehat{B'AC}$ es uno de los seis ángulos exteriores del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$

Definiciones.

- Dados tres puntos no alineados A, B y C,

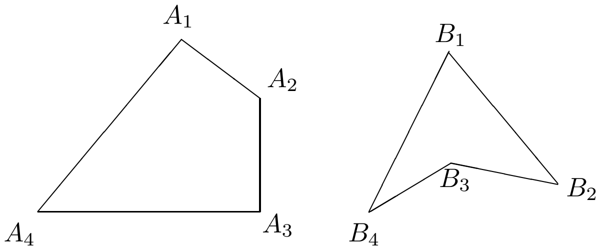
- se llama **triángulo** de vértices A, B y C a la unión de los tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$; se denota con $\overset{\triangle}{ABC}$.
- se llama **vértice del triángulo** a cada uno de los puntos A, B, C.
- se llama **lado del triángulo** a cada uno de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.
- Se llama **interior del triángulo** a la intersección de los semiplanos: de borde $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a C, de borde $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a A y de borde $\overleftrightarrow{CA}$ que contiene a B.
- Se llama **ángulo del triángulo** o **ángulo interior del triángulo** a cualquiera de los ángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$.

- Se llama **punto interior de un triángulo** a cualquier punto perteneciente al interior del triángulo.
- Se llama **punto exterior de un triángulo** a cualquier punto coplanar con él, que no pertenezca ni al ángulo ni a su interior.
- Se llama **región triangular** de un triángulo a la unión del triángulo junto con su interior.
- Se llaman **ángulo exterior de un triángulo** a cualquiera de los ángulos adyacentes de un ángulo del triángulo. Cada triángulo tiene seis ángulos exteriores.

6. Polígonos, y regiones poligonales

Definiciones.

- Dados n puntos distintos A_1, A_2, …, A_n de un plano α con $n \geq 3$ y tales que cada recta $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{A_2A_3}$, …, $\overleftrightarrow{A_{n-1}A_n}$, $\overleftrightarrow{A_nA_1}$ determina un semiplano de α que contiene a todos los puntos dados.
  - llamamos **polígono (convexo)** determinado por esos puntos, en ese orden, a la unión de los segmentos siguientes:
  $$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \cdots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}.$$
  - los puntos A_1, A_2, … A_n se llaman **vértices del polígono (convexo)**.
  - cada uno de los segmentos
  $$\overline{A_1A_2}, \quad \overline{A_2A_3}, \quad \ldots \quad \overline{A_{n-1}A_n}, \quad \overline{A_nA_1}$$
  se llama **lado del polígono (convexo)**.
  - cada ángulo
  $$A_n\widehat{A_1}A_2, \quad A_1\widehat{A_2}A_3, \quad \ldots \quad A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$$
  se llama **ángulo del polígono (convexo)** o **ángulo interior del polígono (convexo)**.
- A un ángulo adyacente de un ángulo interior de un polígono (convexo) se le llama **ángulo exterior del polígono (convexo)**.



polígono (convexo) no es polígono (convexo)

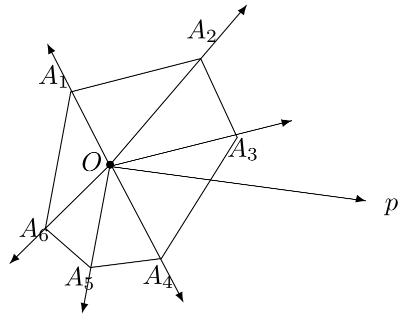
Nota. Observamos que estamos llamando "polígono (convexo)" a figuras que ciertamente no son convexas. Deberíamos decir "polígono de interior convexo".

El triángulo es un caso particular de polígono (convexo), con tres vértices y tres lados.

Se deja como ejercicio generalizar las definiciones de interior de un triángulo, región triangular, y exterior de un triángulo, para obtener definiciones de **interior de un polígono (convexo)**, **región poligonal convexa**, **exterior de un polígono (convexo)** y convencerse de que el interior y la región poligonal son conjuntos convexos mientras que ni el polígono (convexo), a pesar de su nombre, ni el exterior lo son.

Teorema. *Sean A_1,… A_n los vértices de un polígono (convexo) contenido en un plano π. Sea O un punto interior del polígono y p una semirrecta del plano π con origen en O. Entonces la semirrecta y el polígono tienen exactamente un punto en común.*

Demostración. Daremos sólo la idea de la demostración.



Se puede justificar que con las semirrectas $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\ldots$, $\overrightarrow{OA_n}$ se divide al plano en n sectores angulares: $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$, $\ldots$, $\widehat{A_nOA_1}$. Por lo tanto la semirrecta p estará incluida en alguno de los sectores angulares. Por ejemplo como en la figura en el sector $\widehat{A_3OA_4}$. Entonces alguna de estas tres cosas debe suceder:

(a). p es interior al ángulo $\widehat{A_3A_4}$, como sugiere la figura, y entonces por el teorema de la semirrecta interior de un ángulo, p intersecta en un punto al lado $\overline{A_3A_4}$.

(b). $\overrightarrow{OA_3} = p$, y entonces A_3 es el único punto en común.

(c). $\overrightarrow{OA_4} = p$, y entonces A_4 es el único punto en común.

■

Algunas preguntas:

- ¿Se pueden unir dos puntos interiores de un polígono (convexo) con un segmento de puntos interiores? Sí, porque el interior del polígono (convexo) es convexo.
- ¿Se pueden unir dos puntos exteriores con un segmento de puntos exteriores? No siempre, y es por ello que el exterior del polígono (convexo) no es convexo.

Sin embargo se puede probar que dos puntos exteriores sí pueden unirse por una "cadena" de segmentos formados por puntos exteriores.

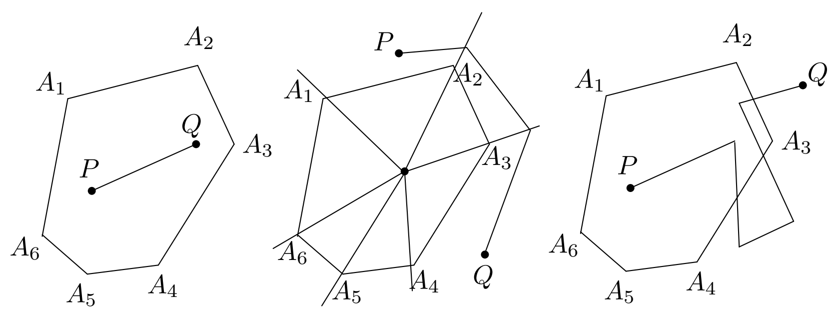
Definiciones. Dados n puntos de un plano α, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, con $n \geq 2$, se llama poligonal determinada por esos puntos en ese orden a la unión de segmentos

$$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \cdots \cup \overline{A_{n-1}A_n}$$

Más preguntas:

¿Cualquier polígono (convexo) es una poligonal? ¿Cualquier poligonal es un polígono (convexo)? A modo de respuesta, enunciaremos un teorema que no demostraremos; pero lo acompañaremos de figuras que sugieren los pasos de una demostración.

Teorema. (De Jordan) *Dado un polígono (convexo) y dos puntos ambos interiores o ambos exteriores siempre pueden unirse por una poligonal que no corta al polígono. Y toda poligonal que une en punto interior con uno exterior sí corta al polígono.* (Puede cortarlo más de una vez).



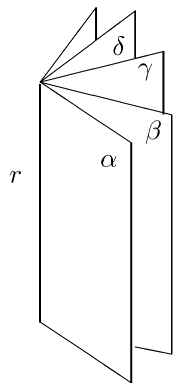
7. Algunos otros conjuntos de interés

Definiremos algunos conjuntos de puntos y/o de semirrectas y/o semiplanos que utilizaremos posteriormente. Y también daremos algunas definiciones de conjuntos de puntos, muchos de ellos familiares a los alumnos.

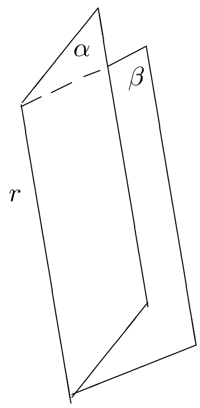
Reiteramos que simplificaremos las expresiones, cuando no sea posible la confusión hablando, por ejemplo, de un “semiespacio de borde cierto semiplano ...”, cuando debiéramos decir “semiespacio cuyo borde incluye a tal semiplano ...”

Definiciones.

- Dado un plano α y un punto $O \in \alpha$:
  - Se llama **haz de semirrectas del plano α de centro O** al conjunto de todas las semirrectas de origen O contenidas en α.
  - A O se le llama **centro del haz**.
- Dado un punto O:
  - Se llama **radiación de semirrectas** de centro O al conjunto de todas las semirrectas del espacio de origen O.
  - A O se le llama **centro de la radiación**.
- Dada una recta r:
  - Se llama **haz de semiplanos** de borde r al conjunto de todos los semiplanos del espacio de borde r.
  - A r se le llama **eje del haz de semiplanos**.



Haz de semiplanos de eje r



Diedro o Angulo diedro
Unión de caras

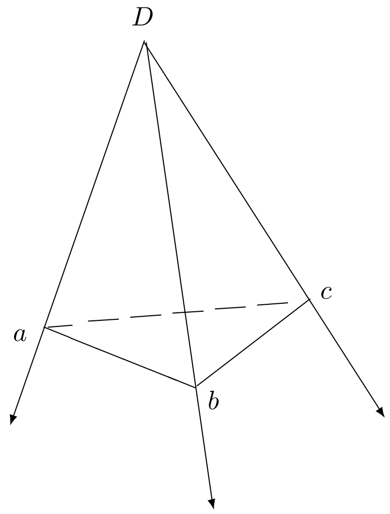
Caras: semiplanos α, β
Arista: recta r
Interior: ...
Exterior: ...

- Se llama **diedro** o **ángulo diedro** a la unión de dos semiplanos distintos de igual borde no opuestos, es decir la unión de dos semiplanos no coplanares. Si los semiplanos son α y β, denotaremos al diedro $\alpha \cup \beta$ con $\widehat{\alpha\beta}$. Además:
  - α y β son las **caras del diedro**.
  - Al borde de los semiplanos se le llama **arista del diedro**.
  - La intersección de los semiespacios abiertos, cada uno con borde una de las caras y que contiene a la otra cara, se llama **interior del diedro**.
  - Se llama **exterior del diedro** al conjunto de puntos del espacio que no pertenecen ni al interior ni a ninguna de las caras del mismo.

  Un ángulo <u>di</u>edro tiene <u>dos</u> caras y una arista.
- Dadas tres semirrectas de igual origen y no coplanares a, b y c se llama **triedro** o **ángulo triedro** determinado por ellas a la unión de los sectores angulares $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ y $\widehat{ca}$.
  - A cada una de las semirrectas nombradas se la llama **arista del triedro**.
  - Se llama **vértice del triedro** al origen de las tres aristas

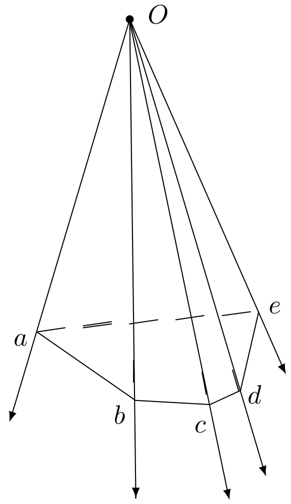
- ◦ A cada uno de los sectores angulares nombrados se le llama **cara del triedro**.
- ◦ La intersección de los interiores de tres semiespacios, cada uno con borde una de las caras y que contiene a las caras restantes, se llama **interior del triedro**.
- ◦ Se llama **exterior del triedro** al conjunto de puntos del espacio que no pertenecen ni al interior ni a ninguna de las caras del mismo.

Un ángulo <u>tri</u>edro tiene <u>tres</u> caras, tres aristas y un vértice.



Triedro o Angulo triedro
Unión de caras
Caras:
sectores angulares de
$\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$
Aristas: semirrectas a, b, c
Vértice: D
Interior: ...
Exterior: ...

- Dadas n semirrectas con un mismo origen, a_1, a_2, $\ldots a_n$ tales que existe algún plano que corta a cada una de las semirrectas en puntos que son vértices de un polígono (convexo), se dice que determinan un **ángulo poliedro**, de acuerdo a lo siguiente:
  - ◦ Se llama **cara de un ángulo poliedro** a cualquiera de los sectores angulares determinados por los pares de semirrectas "vecinas" (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots (a_{n-1}, a_n)$, (a_n, a_1).
  - ◦ Se llama **ángulo poliedro** a la unión de todas sus caras.
  - ◦ Se llama **arista de un ángulo poliedro** a cualquiera de las semirrectas a_1, a_2, $\ldots a_n$. Las aristas son los lados de las caras del ángulo poliedro.
  - ◦ Se llama **vértice de un ángulo poliedro** al origen común de todas sus aristas. Es el vértice de todas las caras del ángulo poliedro.
  - ◦ La intersección de los interiores de los n semiespacios, cada uno con borde una de las caras y que contiene a las caras restantes, se llama **interior del ángulo poliedro**.
  - ◦ Se llama **exterior de un ángulo poliedro** al conjunto de puntos del espacio que no pertenecen ni al interior ni a ninguna de las caras del mismo. Un ángulo poliedro de n aristas tiene n caras y un vértice.

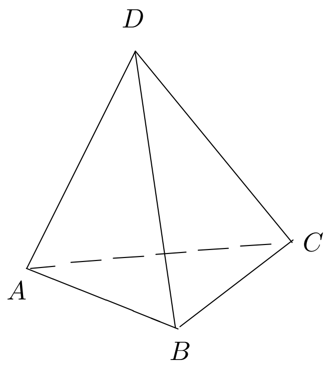


Angulo poliedro
Unión de caras
Caras: sectores angulares $\widehat{ab}$,
$\widehat{bc}$,..., $\widehat{ea}$
Aristas: semirrectas a, b, ..., e
Vértice: O
Interior: ...
Exterior: ...

- Dados cuatro puntos no coplanares A, B, C y D se llama **tetraedro** determinado por esos puntos a la unión de las cuatro regiones triangulares $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{ABD}$, $\overset{\triangle}{ACD}$, $\overset{\triangle}{BCD}$.

- ○ Cada una de esas regiones triangulares se llama **cara del tetraedro**.
- ○ Cada lado de esos triángulos, segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, se llama **arista del tetraedro**.
- ○ Los puntos nombrados, vértices de las caras, se llaman **vértices del tetraedro**.
- ○ La intersección de los cuatro semiespacios abiertos de borde cada una de las caras y que contienen al vértice restante, **vértice opuesto a la cara**, se llama **interior del tetraedro**.
- ○ Los puntos que no pertenecen al interior ni a ninguna de sus caras forman el **exterior del tetraedro**.

Un tetraedro tiene cuatro vértices, seis aristas y cuatro caras.



Tetraedro
Unión de caras
Caras: regiones triangulares de $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{ABD}$, $\overset{\triangle}{ACD}$, $\overset{\triangle}{BCD}$
Aristas: segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$
Vértices: A, B, C, D
Interior: ...
Exterior: ...

- Un poliedro (convexo) de n caras es la unión de n regiones poligonales, no coplanares dos a dos, llamadas **caras del poliedro**, tales que

(a). Cada cara es borde de un semiespacio que contiene a las demás caras.

(b). La intersección de dos caras distintas o bien es vacía, o un vértice de ambas caras, o un lado de ambas caras.

(c). Si una cara tiene m lados, entonces habrá otras m caras tales que con la primera comparten exactamente un lado.

- ○ Los lados de los polígonos que definen las caras del poliedro reciben el nombre de **aristas del poliedro**.
  - ○ Los vértices de esos mismos polígonos se llaman **vértices del poliedro**.
  - ○ Se llama **interior del poliedro** a la intersección de los interiores de los n semiespacios de borde cada una de las caras y que contienen a las demás caras.
  - ○ Se llama **exterior del poliedro** al conjunto de puntos no pertenecientes a su interior ni a ninguna de sus caras.

  Para un poliedro (convexo) de n caras, donde no necesariamente todas las caras tienen igual cantidad de lados, no es posible establecer cuántos vértices y cuántas aristas tendrá. Pero se cumple la conocida fórmula de Euler: $v - a + c = 2$, donde v es el número de vértices, a es el número de aristas, y $c = n$ es el número de caras.

Nota. En forma similar a lo que ocurre con los polígonos (convexos), un poliedro (convexo) no es un conjunto convexo, aunque sí es convexo su interior.

Señalamos también que si bien un diedro y un ángulo diedro son la misma cosa, al igual que un triedro y un ángulo triedro, no ocurre lo mismo con un poliedro y un ángulo poliedro: por ejemplo, un ángulo poliedro tiene un único vértice y sus caras son regiones angulares; y un poliedro tiene cuatro o más vértices y sus caras son regiones poligonales.

Se deja como ejercicio verificar que el triedro es un caso particular del ángulo poliedro y que el tetraedro es un caso particular del poliedro (convexo).

Capítulo III

Transformaciones biyectivas Transformaciones rígidas del espacio

1. Introducción

Un modo de profundizar el estudio de un conjunto, en cuanto a algunas propiedades, es analizar cuan "intercambiables" son sus elementos, o por el contrario cuan especiales son algunos de ellos.

Esto es aplicable, incluso a un conjunto de amigos que desea organizarse para disfrutar del tiempo libre. Seguramente tendrán que ocuparse de algunas tareas, como ir a comprar entradas para los espectáculos, comprar refrescos, etc. Y puede ser que aparezca una lista con la distribución de tareas entre los amigos. (Quizás a varios les tocó la tarea de no hacer nada ...). Si entre las tareas hay algunas notoriamente más agradables o más penosas que otras, puede valer la pena, de vez en cuando, intercambiar tareas para distribuir la carga en forma más justa. Esos intercambios pueden ser "sencillos" como "Para esta semana lo que hacía la persona A lo hará la persona B y lo de la persona B lo hará la persona A y las demás no cambian" o menos sencillos como "desde hoy lo que hacía la persona A lo hará la persona B, lo de la persona B lo hará la persona C, y lo de la persona C lo hará la persona A; y para los demás, lo que hacia D, etc. " Se puede pensar en programar las actividades para muchas semanas utilizando en definitiva todos los modos posibles de intercambiar las asignaciones iniciales. Cada intercambio de asignaciones corresponderá a una transformación biyectiva.

El problema se complica si algunas personas no están capacitadas para alguna de las tareas o si ciertas tareas requieren de dos o más personas con características especiales. Eso resultará en que alguno de los modos de asignación no sean posibles. Es decir algunas de las transformaciones biyectivas no será conveniente efectuarlas si se pretende que las tareas sigan ejecutándose correctamente: entre todas las transformaciones biyectivas habrá que seleccionar las que permitan que se sigan cumpliendo las tareas correctamente.

Nos preocuparemos de transformaciones biyectivas del espacio o de algún subconjunto de puntos de él. Aquí, una de las "tareas" fundamentales que "saben" o "no saben" cumplir las ternas de puntos es estar alineados; por eso una de las condiciones, aunque no la única, que pediremos a las transformaciones biyectivas para llamarlas rígidas es la de no intercambiar una terna de puntos alineados con una terna de puntos no alineados.

Las transformaciones biyectivas que llamaremos rígidas están sugeridas por los movimientos de los objetos: Si pensamos en el conjunto de puntos del espacio "ocupados" por un objeto en determinado momento, y luego movemos el objeto a otro lugar, podemos pensar en una correspondencia en la que a los puntos ocupados inicialmente les corresponde los puntos ocupados en la nueva posición, Y podemos imaginar también que a los puntos no ocupados inicialmente por el objeto les correspondan los puntos no ocupados finalmente por el objeto: De algún modo, y aprovechando que el espacio se extiende indefinidamente hacia todos lados imaginaremos que hay una correpondencia del espacio en sí mismo en la que ocurre lo dicho y en la que se preservan todas las distancias (aunque aun no sepamos precisar el concepto de distancia) ...

2. Transformaciones biyectivas

Definición. Una **transformación biyectiva** de un conjunto o una **biyección** es una función biyectiva del conjunto en sí mismo.

En lo que sigue usaremos la abreviatura "t.b." para indicar <u>transformación biyectiva</u> y también para indicar <u>transformaciones biyectivas</u>.

Si μ es una t.b. de un conjunto $\mathcal{X}$, μ estará dada por una ley o conjunto de reglas para hacer corresponder a cada elemento P del conjunto $\mathcal{X}$ un elemento de $\mathcal{X}$, que se llamará **imagen de** P por μ y se denotará $\mu(P)$. (Se lee "mu de P").

A veces usaremos la expresión "μ envía cierto punto A a cierto punto B", o "transforma cierto punto A en cierto punto B"; eso significará, ni más ni menos, que al punto A le corresponde en la transformación μ, el punto B; es decir $\mu(A) = B$.

La ley estará plasmada por un conjunto de pares ordenados de elementos correspondientes de $\mathcal{X}$ en los que el segundo elemento será la imagen por μ del primero, y será tal que:

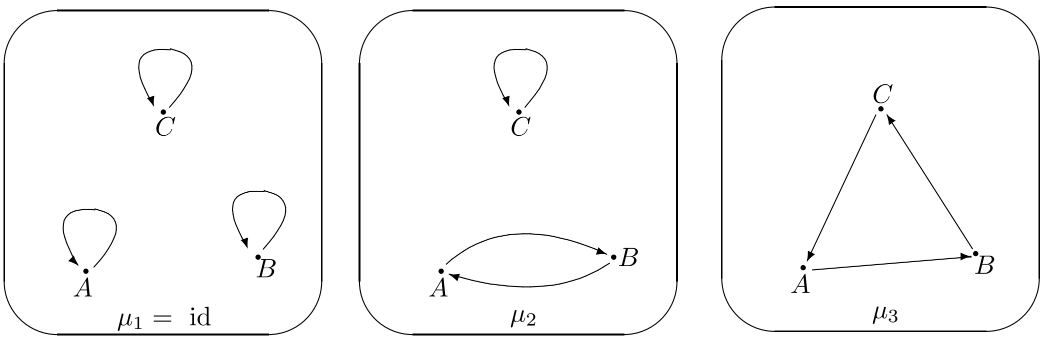
- cada elemento de $\mathcal{X}$ tiene una única imagen por μ. (μ es una función de dominio $\mathcal{X}$).
- cada elemento de $\mathcal{X}$ es imagen por μ de un único elemento. (μ es inyectiva y es sobreyectiva sobre $\mathcal{X}$).

O en otras palabras cada elemento de $\mathcal{X}$ aparece exactamente una vez como primera componente de un par ordenado de correspondientes y exactamente una vez como segunda componente de un par.

Si el conjunto $\mathcal{X}$ es finito, y μ es una t.b. de $\mathcal{X}$, es posible representarlos gráficamente, con un punto por cada elemento del conjunto $\mathcal{X}$ y una flecha por cada par de elementos correspondientes por μ; una flecha que sale de un punto representante de un elemento P de $\mathcal{X}$ y llega al punto que representa al elemento $\mu(P)$ de $\mathcal{X}$.

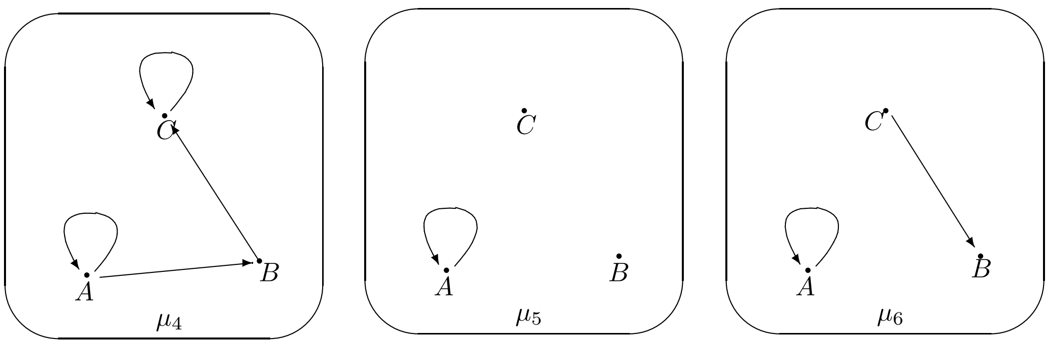
Para que un conjunto de flechas represente a una t.b. de $\mathcal{X}$, deberá haber exactamente una flecha que sale de cada punto y exactamente una flecha que llega a cada punto.

En los ejemplos siguientes $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$ es un conjunto finito. Veamos algunos ejemplos de t.b.



- μ_1. En esta t.b. cada elemento tiene por imagen a sí mismo. Se llama **transformación identidad**, y la denotaremos por id. Se cumple: id $(A) = A$, id $(B) = B$, id $(C) = C$
- μ_2. Se tiene: $\mu_2(A) = B$, $\mu_2(B) = A$, $\mu_2(C) = C$.
- μ_3. Se tiene: $\mu_3(A) = B$, $\mu_3(B) = C$, $\mu_3(C) = A$.

Las siguientes no representan t.b. (Representan **relaciones** que no son t.b.). Con una razón que demos para justificarlo alcanzará.



- μ_4 no es t.b. pues hay dos flechas que salen de A. (Otra razón: hay dos flechas que llegan a C. Pero insistimos en que, con dar una condición que no se cumple alcanza para justificar que la relación no es una t.b.).
- μ_5 no es t.b. porque, por ejemplo, de C no sale ninguna flecha.
- μ_6 no es t.b. porque, por ejemplo, a C no llega ninguna flecha.

Puede interesarnos conocer cuántas t.b. de un conjunto $\mathcal{X}$ dado existen.

Por lo pronto, para cualquier conjunto $\mathcal{X}$ se puede definir la **transformación identidad**: $\mathrm{id}(P) = P$ para todo $P \in \mathcal{X}$.

Para el ejemplo anterior, $\mathcal{X} = \{A, B, C\}$, que tiene tres elementos hay exactamente 6 t.b.: las tres representadas y otras tres más (se deja como ejercicio indicarlas). Para un conjunto de n elementos existen $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ biyecciones o permutaciones. Si $\mathcal{X}$ tiene infinitos elementos tendremos infinitas biyecciones.

Algunas transformaciones biyectivas de subconjuntos de Ω

Cuando observamos una figura geométrica muchas veces advertimos "simetrías" en ellas que tienen que ver con la intercambiabilidad de los puntos de la figura en relación a las propiedades que nos interesan. (Si recordamos la introducción, ciertos subconjuntos de puntos cumplen con la "tarea" de asegurar cierta propiedad de la figura y sólo pueden ser intercambiados con otros que aseguren también la misma propiedad).

Por ejemplo, t.b. de un triángulo en sí mismo hay infinitas. Una sencilla de describir es elegir dos puntos cualesquiera del triángulo —sean o no vértices— y que la t.b intercambie esos dos puntos dejando fijos a los demás. Si nos interesan t.b. que preserven la alineación de puntos sigue habiendo infinitas posibilidades pero en todas ellas la imagen de un vértice deberá ser otro vértice; si pretendemos que además se preserven todos los tamaños, entonces las posibilidades se reducen muchísimo y sólo tenemos las t.b. que llamaremos transformaciones rígidas.

3. Inversa de una transformación biyectiva. Imagen y de un conjunto. Puntos fijos. Conjuntos estables

Definiciones.

- Por cada t.b. μ de un conjunto $\mathcal{X}$ tenemos la llamada **transformación inversa de la dada** que se denota con μ^{-1} y que también es una t.b. En una representación con flechas, las flechas de μ y las de μ^{-1} son unas opuestas de las otras. Más específicamente, si $X, Y \in \mathcal{X}$ entonces,

$$\mu(X) = Y \iff \mu^{-1}(Y) = X$$

- Además de imagen de un elemento de $\mathcal{X}$ por μ, hablamos de **imagen de un conjunto**, subconjunto de $\mathcal{X}$, por μ. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ y $\mu : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ entonces $\mu(\mathcal{A})$ es el conjunto formado por las imágenes por μ de los elementos de $\mathcal{A}$. En símbolos:

$$\mu(\mathcal{A}) = \{Y \in \mathcal{X} \mid Y = \mu(X) \text{ para algún } X \in \mathcal{A}\}$$

- Sea μ una t.b. de un conjunto $\mathcal{X}$, $P \in \mathcal{X}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$.
  - P se llama **punto fijo en** μ si $\mu(P) = P$.
  - $\mathcal{A}$ se dice **conjunto estable en** μ si $\mu(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Un conjunto estable en μ puede contener o no contener uno o más puntos fijos en μ.

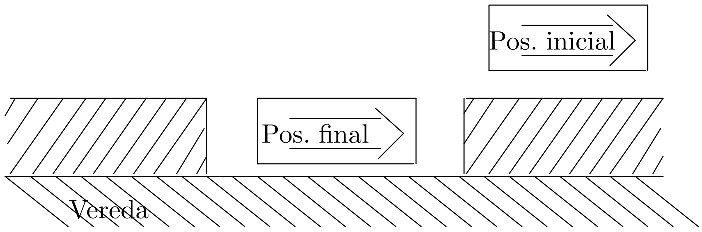
Es fácil convencerse de que los puntos fijos, y los conjuntos estables en una t.b. también son puntos fijos y conjuntos estables de la t.b. inversa.

4. Composición de transformaciones biyectivas

Componer dos t.b. de un mismo conjunto, significa aplicar una t.b. después de la otra en determinado orden. A la transformación resultante la llamamos transformación compuesta de las dos dadas.

Ya dijimos que muchas t.b. del espacio Ω—las que luego llamaremos transformaciones rígidas—están sugeridos por movimientos de objetos, pensando en lugares (puntos) ocupados y desocupados inicial y finalmente. Y utilizamos muchas "composiciones" de esas t.b. en la vida práctica:

- La estrategia habitual para estacionar un auto entre otros ya estacionados, puede pensarse como composición de tres transformaciones: las dos primeras, rotaciones con centros distintos y ángulos orientados congruentes pero de sentido contrario, y una tercera que a veces no es necesaria, traslación. La transformación compuesta entre posición inicial y posición final corresponde a una traslación.



- Para conseguir trasladar un cajón muy pesado suele ser más fácil, en lugar de mover el cajón paralelamente a sí mismo, ir haciéndolo girar ángulos pequeños, de sentido contrario, apoyándonos alternativamente en una u otra de dos de las esquinas del cajón.

Definiciones. Si μ y σ son dos t.b. de cierto conjunto $\mathcal{X}$ entonces, se define $\tau = \mu \circ \sigma$ mediante:

$$\tau(P) = (\mu \circ \sigma)(P) = \mu(\sigma(P)), \qquad \text{para cada } P \in Xmc$$

$\mu \circ \sigma$ (lo leeremos "σ **compuesta con** μ, o bien μ **cerito** σ"). Diremos que τ es la **composición de** σ **y** μ.

No es difícil convencerse de que la τ recientemente definida es una t.b. de $\mathcal{X}$. Más aun se puede verificar que:

Proposición. *Las t.b. de un conjunto $\mathcal{X}$ cumplen, en relación a la composición, las siguientes propiedades:*

(a). *La composición de dos t.b. de $\mathcal{X}$ es una t.b. de $\mathcal{X}$.*

(b). *La composición es asociativa, es decir si μ, σ y τ son t.b. entonces*

$$((\mu \circ \sigma) \circ \tau) = (\mu \circ (\sigma \circ \tau))$$

(c). *Para cualquier t.b. μ se cumple*
$$\mu \circ id = id \circ \mu$$

(d). *Para cualquier t.b. μ se cumple*
$$\mu \circ \mu^{-1} = \mu^{-1} \circ \mu = id$$

Suele resumirse lo anterior diciendo que el conjunto de t.b. de un conjunto dado junto con la operación de composición constituye un **grupo**.
Definición. Una t.b. μ se dice **involutiva** o que es una **involución** si $\mu \circ \mu =$ id con $\mu \neq$id.
Es fácil verificar lo siguiente:

Proposición. *Para $\mu \neq$ id, μ es involutiva si y sólo si $\mu = \mu^{-1}$. Es decir, para $\mu \neq id$,*

$$\mu \textit{ involutiva es equivalente a:} \quad \mu(X) = Y \textit{ si y sólo si } \mu(Y) = X.$$

5. Preservación de pertenencia e inclusión

Cualquier t.b. de un conjunto $\mathcal{X}$ y también su inversa preservan todas las relaciones de pertenencia e inclusión. En especial, si μ es una t.b. de $\mathcal{X}$, $P \in \mathcal{X}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$, entonces,

(a). $P \in \mathcal{A}$ si y sólo si $\mu(P) \in \mu(\mathcal{A})$

(b). $P \in \mathcal{A}$ si y sólo si $\mu^{-1}(P) \in \mu^{-1}(\mathcal{A})$

(c). $\mu(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \mu(\mathcal{B}) \cup \mu(\mathcal{C})$

(d). $\mu(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = \mu(\mathcal{B}) \cap \mu(\mathcal{C})$

(e). $\mu^{-1}(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \mu^{-1}(\mathcal{B}) \cup \mu^{-1}(\mathcal{C})$

(f). $\mu^{-1}(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = \mu^{-1}(\mathcal{B}) \cap \mu^{-1}(\mathcal{C})$

Nota. Los alumnos que ya han trabajado con funciones recordarán que la notación μ^{-1} también se usa aunque la función μ no sea biyectiva:

- Con $\mu^{-1}(\mathcal{A})$ se denota a la **preimagen del conjunto** $\mathcal{A}$ por μ; es decir al conjunto de elementos cuyas imágenes por μ pertenecen a $\mathcal{A}$.
- Con $\mu^{-1}(Q)$ se denota a la **preimagen del elemento** Q; es decir al conjunto de elementos cuya imagen por μ coincide con Q. En realidad, podemos pensar que abusamos de la notación, para simplificarla, escribiendo $\mu^{-1}(Q)$ cuando debiéramos escribir $\mu^{-1}(\{Q\})$.

Cuando μ es biyectiva, ambos conceptos coinciden, es decir la preimagen por μ de un conjunto coincide con la imagen por la biyección μ^{-1} del conjunto.

Si μ es una función, pero no se sabe si es o no biyectiva, μ^{-1} se utiliza sólo para preimágenes de conjuntos; únicamente podremos asegurar las propiedades de los incisos (a), (c) (e) y (f); las otras deben reformularse:

Si μ es una función, sea o no biyectiva:

(b) Si $P \in \mathcal{A}$ entonces $\mu^{-1}(P) \subset \mu^{-1}(\mathcal{A})$
quizás sea menos confuso escribir:
Si $P \in \mathcal{A}$ entonces $\mu^{-1}(\{P\}) \subset \mu^{-1}(\mathcal{A})$
(d) $\mu(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \subset \mu(\mathcal{B}) \cap \mu(\mathcal{C})$

6. Orientación

Llamado a la intuición

Las personas, desde muy temprano en la vida, utilizamos expresiones como “grande”, “pequeño”, “igual”, “distinto”, en relación al tamaño de los objetos; y también “igual” o “distinto” en relación a las formas y a otras características de los objetos. Pero no suele prestarse mucha atención a la orientación.

Por ejemplo, admitimos que todos los autos de una misma marca y modelo tienen igual forma y tamaño. Y podríamos, con la imaginación “mover sin deformar” los lugares ocupados por uno de ellos para “superponerlos” con los lugares correspondientes ocupados por el otro; correspondientes en el sentido de que están ocupados por “las mismas partes” de los autos . (Al avanzar el curso aprenderemos a decir que esos autos son congruentes).

Hay autitos de colección que son “igualitos” a los autos grandes a los que imitan; la diferencia entre el autito de colección y el auto grande de la misma marca y modelo es el tamaño; decimos que tienen “igual forma”. (Al avanzar el curso aprenderemos a decir que son “semejantes”).

En cambio dos autos de marcas y/o modelos distintos, aun cuando tengan algunas medidas coincidentes, (tamaños parecidos), suelen tener formas distinguibles; eso permite que muchos chicos, ya antes de saber leer, y sin ver los logos de las marcas, sepan cuál es la marca y modelo de algunos de los autos que encuentran. Podemos imaginar transformaciones biyectivas de un modelo en otro, tal como nos tienen acostumbrados los efectos especiales en videos o películas; pero no alcanzará con sólo “mover” sino que será necesario también “deformar”. (De dos autos de estos no diremos que son congruentes ni tampoco que son semejantes).

Si una persona observa sus manos, puede adoptar posiciones para ellas—dentro de pequeñas imperfecciones que despreciaremos—que corresponden a objetos de igual forma y tamaño; pero, sin embargo, no es posible imaginar un “movimiento sin deformación” de los lugares ocupados por una mano a los correspondientes ocupados por la otra; no podemos, imaginar una superposición de las manos. Una mano difiere de la otra en la orientación. (No diremos que las manos son congruentes sino que son correspondientes en una transformación pseudo-rígida, que, por ejemplo, podría ser una simetría especular).

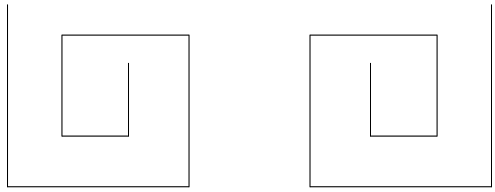
Orden u orientación para rectas; semirrectas orientadoras

Un modo de indicar un orden para una recta es dar una semirrecta y establecer que nos interesa el orden en el que el origen de la semirrecta precede a los demás puntos de la misma. Si usamos una semirrecta para este fin, podremos llamarla **semirrecta orientadora** para la recta.

Dependiendo del lugar desde el que observemos a una semirrecta orientadora, describiremos al orden indicado por ella para la recta, como que crece hacia la derecha, izquierda, adelante, arriba, etc.

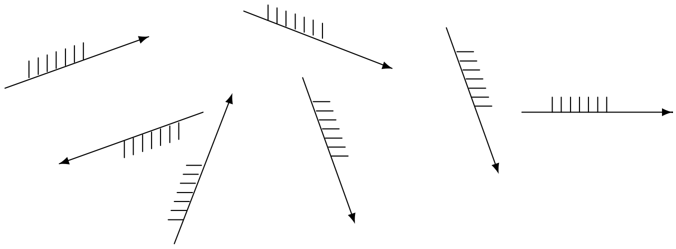
Orientación para un plano; pares orientadores

Conocemos conjuntos planos “iguales en forma y tamaño” pero diferentes en **orientación** respecto del plano; por ejemplo, las dos “espirales angulosas” de la ilustración. Una de ellas, la (a) “crece” en el sentido de las agujas del reloj, mientras que la (b) “crece” en el sentido contrario al de las agujas del reloj. En este caso, va a haber un movimiento, sin deformación, que permita superponer las espirales, pero en ese movimiento será necesario salirse del plano para darle vuelta.



(a) (b)

Entre las figuras contenidas en un plano π, más sencillas desde el punto de vista geométrico, y que nos permiten pensar en orientación para ese plano π, tenemos los pares (semirrectas, semiplanos) con la semirrecta incluida en el borde del semiplano. Llamaremos a cualquier de estos pares **par orientador**. Se han ilustrado varios de esos pares, todos con "la misma orientación".



En cada uno de esos pares, si nos imaginamos caminando hacia adelante, a lo largo de la recta borde del semiplano, en el sentido fijado por la semirrecta, el semiplano lo encontraremos a nuestra izquierda; y si iniciamos un giro de la semirrecta, alrededor de su origen, para que la semirrecta "se introduzca" en el semiplano, tendremos un sentido de giro contrario al de las agujas del reloj. Podremos decir que todos esos pares indican, para el plano, la **orientación de los semiplanos a la izquierda**, que es la misma que la **orientación contraria a la de las agujas del reloj**.

Si en esos pares cambiáramos a las semirrectas por sus opuestas, o a los semiplanos por sus opuestos (¡pero no ambas cosas a la vez!), los pares indicarían la otra orientación: la **de los semiplanos a la derecha**, que es la misma que la **a favor de las agujas del reloj**.

Claro que, sin cambiar nada de la ilustración, si la "miráramos" desde el lado de atrás del papel, (semiespacio opuesto al de adelante del papel), describiríamos a la orientación indicada por los pares (semirrecta, semiplano) como "de los semiplanos a la derecha" o "de giro a favor al de las agujas del reloj".

Es decir que el nombre que demos a la orientación para un plano depende del lugar desde el que observemos al par orientador para el plano. Algo similar a lo que ocurre con el orden para la recta. En cambio, veremos que el nombre que le damos a una orientación para el espacio no depende del lugar desde el que observamos a la terna orientadora correspondiente

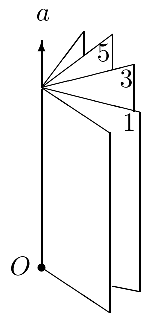
Orientación para el espacio; ternas orientadoras

Desde el punto de vista geométrico, los "objetos" espaciales más sencillos, que pueden coincidir o diferir en orientación son las ternas (semirrecta, semiplano, semiespacio) en las que la semirrecta está incluída en el borde del semiplano y el semiplano está incluido en el borde del semiespacio. Llamaremos a cualquier de estas ternas **terna orientadora**.

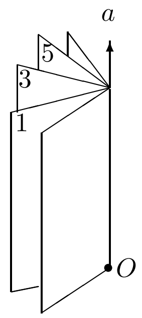
Cada una de esas ternas podemos aparearla o bien con los tres dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha o bien con esos dedos de la mano derecha, pero no con las dos. O de otro modo, de ciertas posiciones de cualquiera de las manos, podemos "extraer" una terna orientadora.

> Disponemos esos tres dedos como para que sugieran tres semirrectas, con el pulgar y el índice incluidos en el plano de la palma de la mano, y el dedo medio apuntando a uno de los semiespacios (¡cuidado: si alguien tiene articulaciones muy flexibles en la mano podría apuntar con el dedo medio al semiplano opuesto del que nos interesa e indicar una orientación contraria!); la terna es la formada por la semirrecta del pulgar, el semiplano de borde el pulgar y que incluye al dedo índice, y el semiespacio de borde el semiplano anterior y que incluye al dedo medio.

También podemos "extraer" ternas orientadoras de los libros; y tenemos orientaciones distintas según que los libros estén escritos en castellano, inglés, etc, o escrito en árabe. En la figura se ha esquematizado la numeración de las hojas en los libros castellanos y en los libros árabes.



Castellano



Arabe

> Tomamos la semirrecta sobre el lomo del libro, en el plano de la tapa, apuntando hacia la parte de arriba del libro ; el semiplano de modo que incluya a la tapa del libro; y el semiespacio de modo de incluir al resto de las hojas

De los tornillos y de algunos sacacorchos podemos extraer también ternas orientadoras; casi todos los tornillos corresponden a una misma orientación; pero hay algunos que corresponden a la otra. De cualquier tornillo se puede extraer una terna orientadora:

> Elegimos arbitrariamente un par orientador (semirrecta, semiplano) para un plano secante con el eje del tornillo; y completamos la terna con el semiespacio hacia el cual avanzará el tornillo cuando se le hace girar en el sentido correspondiente al par orientador elegido.

Así que las orientaciones para el espacio, se pueden nombrar como

(a). la “de los tres dedos de la mano derecha”, o la “de los libros en castellano”, o la “de los tornillos comunes”.

(b). la “de los tres dedos de la mano izquierda”, o la “de los libros en árabe”, o la “de los tornillos no comunes”.

Es posible, pero no lo haremos aquí, dar criterios de comparación entre semirrectas orientadoras para una recta; entre pares orientadores para un plano; y entre ternas orientadoras para el espacio. Esos criterios permiten decidir si concuerdan o se oponen en orientación, sin que haya que apelar a hablar de derecha o izquierda o sentido de las agujas del reloj. Sólo mencionamos lo que se necesita para semirrectas orientadoras:

Se cumple que *dos semirrectas incluidas en una misma recta indican el mismo orden para la recta si la intersección de las dos semirrectas es una semirrecta. E indican ordenes contrarios si la intersección de ellas no es una semirrecta.* En este último caso la intersección de las semirrectas será vacía, un punto o un segmento.

7. Resumen sobre orientación

Reiteramos que, abusando del lenguaje, diremos “semiplano de borde la semirrecta ...” cuando deberíamos decir “semiplano de borde la recta que incluye a la semirrecta ...”; y “semiespacio de borde el semiplano ...” en cuenta de “semiespacio de borde el plano que incluye al semiplano ...”.

- Indicamos un orden para una recta dando una **semirrecta orientadora**, es decir una semirrecta incluida en la recta; el orden será tal que el origen precederá a los demás puntos de la semirrecta; o simplemente un par ordenado de puntos (A, B) y tomar como semirrecta orientadora la $\overrightarrow{AB}$. La semirrecta opuesta, o la semirrecta $\overrightarrow{BA}$ indican el orden opuesto.

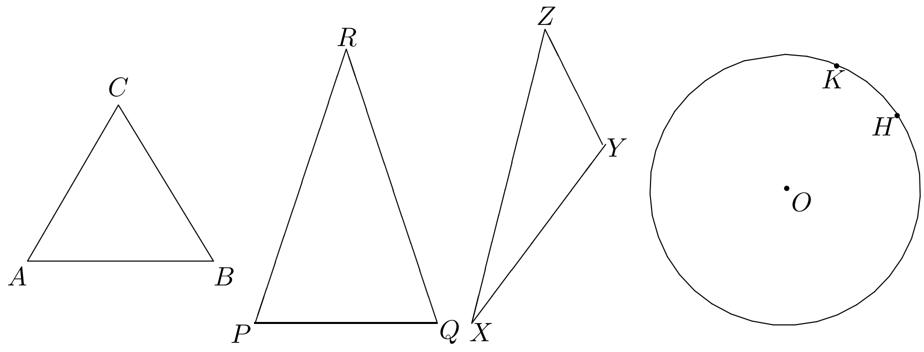
- Indicamos una orientación para el plano dando un **par orientador**, (a, β), donde a es una semirrecta y β es un semiplano de borde la semirrecta, ambos incluidos en un plano; o simplemente damos un par de semirrectas de igual origen (a, b) con a y b no colineales, y consideramos el par orientador (a, β) donde β es el semiplano de borde a que incluye a b. Cambiando una sola de las semirrectas por su opuesta, o tomando el par de semirrectas en el otro orden, (b, a), se indica la orientación opuesta.

- Indicamos una orientación para el espacio dando una **terna orientadora**, (a, β, γ), donde a es una semirrecta, β es un semiplano de borde a y γ es un semiespacio de borde β; o simplemente damos una terna ordenada de semirrectas de igual origen (a, b, c) con a y b y c no coplanares, y consideramos la terna orientadora (a, β, γ) donde β es el semiplano de borde a que incluye a b y γ es el semiespacio de borde β que incluye a c. Las ternas de semirrectas (a, b, c), (b, c, a) y (c, a, b) indican la misma orientación, mientras que las ternas (a, c, b), (b, a, c) y (c, b, a) indican, las tres, la otra orientación opuesta a la anterior. Cambiando una sola de las semirrectas por su opuesta, o las tres semirrectas por sus opuestas, cambia la orientación.

8. Transformaciones rígidas. Presentación intuitiva

En lo que sigue, abreviaremos "transformación rígida" o "transformaciones rígidas" mediante t.r..

Entre las t.b. queremos elegir aquellas que preservan las propiedades de forma, tamaño y orientación y llamarlas t.r.. Claro que si bien se puede formalizar el concepto de orientación con los axiomas introducidos hasta ahora, no podemos hacer lo mismo con los de tamaño y forma. De hecho, los matemáticos han encontrado que se puede axiomatizar qué se entiende por t.r. y recién después de ese y otro axioma formalizar el concepto de distancia entre puntos que es útil para explicar los otros conceptos.



Por ejemplo, para un triángulo isósceles $\overset{\triangle}{PQR}$, de base $\overline{PQ}$ podemos aceptar que haya alguna t.b. μ del triángulo que intercambie adecuadamente los lados; que $\mu(P) = Q$, $\mu(Q) = P$ y $\mu(R) = R$, y que además cumpla $\mu(\overline{RP}) = \overline{RQ}$, $\mu(\overline{RQ}) = \overline{RP}$ y $\mu(\overline{PQ}) = \overline{QP} = \overline{PQ}$ preservando así la forma y el tamaño; y podemos aceptar que también haya preservado el orden dentro de cada lado.

En cambio si el triángulo, como el $\overset{\triangle}{XYZ}$, no fuera ni siquiera isósceles, cualquier t.b. aplicada al mismo, distinta de la identidad estaría "deformándolo".

Con respecto a la circunferencia, seguramente hay infinitas t.r. distintas de la identidad que la transforman en ella misma (se llaman rotaciones de centro O). En todas ellas el tamaño de, por ejemplo, la imagen de $\overline{KH}$, será el mismo.

Es fácil creer que, sin contar a la identidad, hay cinco ($5 = 3! - 1$) t.r. de un triángulo equilátero, que quedan determinadas cuando indicamos cuál es la imagen de cada vértice. Si el triángulo es isósceles pero no equilátero, sólo hay una. Si el triángulo no es isósceles, no hay ninguna. Y ya dijimos que hay infinitas para la circunferencia. (Si se cuenta también a la identidad, habrá respectivamente seis, dos, una e infinitas t.r.).

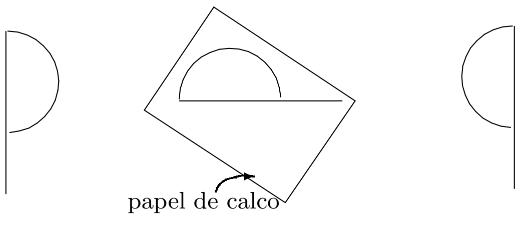
Insistimos: como el triángulo tiene infinitos puntos tendremos infinitas t.b. del triángulo. Pero salvo las t.r., que son sólo seis, las demás quizás transformarán algún vértice en un punto que no sea vértice; o no respetarán que la imagen de puntos alineados estén alineados, etc.

Aun cuando en la vida práctica nuestro interés se concentra en subconjuntos propios de puntos del plano o del espacio, es más fácil trabajar matemáticamente con t.b. de todo el espacio, o al menos de todo el plano, y distinguir cuáles de esas t.b. serán t.r.

Si tenemos dos sillas "iguales" (deberíamos decir congruentes) podremos pensar en una t.r. de todo el espacio que envíe los lugares ocupados por la primer silla a los lugares ocupados por la segunda silla y los lugares no ocupados por la primer silla a los lugares no ocupados por la segunda silla. Y todo ello preservando todas las distancias entre pares de puntos.

Se puede visualizar una t.r., en lo que hace a los puntos de una figura plana, calcando los puntos de interés de la misma en un papel transparente y luego moviendo el papel de calco hasta llevarlo a otra posición sobre el mismo u otro plano. De ese movimiento nos importa poco registrar los lugares por los que haya paseado el papel de calco (a lo sumo, si el plano inicial y final coinciden, nos interesará saber si hubo necesidad o no de separar el papel del plano para darle vuelta); sólo importan las posiciones iniciales y finales.

En la figura, hemos obtenido la "letra" P de la derecha a partir de la letra P de la izquierda utilizando un papel de calco. Notemos que para ello, habrá sido necesario dar vuelta el papel de calco.



Para los puntos de un objeto, sea plano o no, podemos imaginar que el objeto se desdobla en él y una copia de él mismo; y que a la copia la movemos hasta otro lugar. Si tenemos dos sillas "iguales", no hay inconveniente en crear con la imaginación una copia de una de ellas, inicialmente ocupando el mismo lugar, y luego mover esa copia imaginaria hasta hacerla coincidir con la otra silla. (Recordar efectos especiales de películas parecidos); no es necesario deformar la copia de la silla…

Hay mayor dificultad en crear con la imaginación una copia de un zapato de un par ocupando inicialmente el mismo lugar y luego moverla hasta coincidir con el otro zapato del par; no se podrá hacer sin deformar la copia; y es que aquí hay un cambio de orientación.

Insistimos: los axiomas que tenemos hasta ahora no nos permiten hablar de manera precisa de forma y/o tamaño, así que decir que "una t.r. es una t.b. que preserva formas, tamaños y orientación" no nos sirve como definición de t.r. ; sólo nos ha servido para conocer qué es lo que queremos obtener con las t.r.

Así que utilizaremos un nuevo axioma para referirnos al concepto primitivo de t.r. del espacio.

9. Axioma de las transformaciones rígidas

Axioma 10 *Las transformaciones rígidas del espacio son transformaciones biyectivas del espacio en sí mismo y satisfacen las propiedades siguientes:*

(a). Si μ es una t.r. y A, B y C son tres puntos alineados con B entre A y C entonces $\mu(A)$, $\mu(B)$ y $\mu(C)$ están alineados y $\mu(B)$ está entre $\mu(A)$ y $\mu(C)$. Más brevemente: Las t.r. preservan la alineación y la relación estar entre.

(b). Si μ es una t.r. y O, A, B y C son puntos no coplanares entonces los sentidos para el espacio dados por las ternas ordenada de semirrectas

$$(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}) \quad (\overrightarrow{\mu(O)\mu(A)},\ \overrightarrow{\mu(O)\mu(B)},\ \overrightarrow{\mu(O)\mu(C)}),$$

coinciden. Más brevemente las t.r. preservan el sentido del espacio.

(c). Sea μ una t.r. y A, B dos puntos distintos con $\mu(A) = A'$ y $\mu(B) = B'$.

$$\textit{Si } \overline{A'B'} \subset \overline{AB} \textit{ entonces } \overline{A'B'} = \overline{AB}.$$

Más brevemente, si tenemos en cuenta que el primer inciso también debe cumplirse: Ninguna t.r. transforma un segmento en una parte parte propia de él.

(d). Sea μ una transformación rígida, O, A, B tres puntos no alineados $A' = \mu(A)$, $O = \mu(O)$ y $B' = \mu(B)$. Si

$$\underline{\text{el sector angular del } \widehat{A'OB'}} \subset \underline{\text{el sector angular del } \widehat{AOB}}$$

entonces

$$\underline{\text{el sector angular del } \widehat{A'OB'}} = \underline{\text{el sector angular del } \widehat{AOB}}$$

Más brevemente, si tenemos en cuenta que el primer inciso también debe cumplirse: Ninguna t.r. puede transformar un sector angular de vértice O en otro de igual vértice que sea parte propia del primero.

(e). La composición de dos transformaciones rígidas y la inversa de una transformación rígida son transformaciones rígidas.

(f). Dadas dos semirrectas a y a' y dos semiplanos α y α' cuyos bordes contienen respectivamente a a y a', existe una única transformación rígida que transforma a en a', y α en α'.

De otro modo Dados O, P y R no alineados y O', Q y S no alineados existe una única t.r. que transforma la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ en $\overrightarrow{O'Q}$ y el semiplano de borde $\overleftrightarrow{OP}$ que contiene a R en el semiplano de borde $\overleftrightarrow{O'Q}$ que contiene a S.

Hablaremos indistintamente de **imagen** o **transformado** u **homólogo** de un punto por una t.r. y también de **imagen** o **transformado** u **homólogo** de un conjunto de puntos por una t.r.

Comentarios

La imagen de una recta por una t.r. μ será una recta. Como para cada recta tenemos dos órdenes naturales para sus puntos no es razonable pedir que las t.r. preserven el orden, pero sí lo es pedir que preserven la relación estar entre como lo hace el inciso (a). Y eso resulta en que el orden para una recta se transforma en un orden para la imagen: Si en uno de los ordenes de la recta r que contiene a A, B, C, resulta que A precede a B, y B precede a C, etc, entonces en alguno de los dos órdenes para la imagen de r resultará que $\mu(A)$ precede a $\mu(B)$ y $\mu(B)$ precede a $\mu(C)$ etc.

Si se hace abstracción del dibujo de las letras y números, se entiende que si ponemos frente a un espejo un libro en castellano, su imagen especular "parecerá", por la numeración de sus páginas, un libro en árabe; es decir que un libro y su imagen especular señalan orientaciones distintas para el espacio. Por lo tanto, no hay ninguna t.r correspondiente a la simetría especular del espacio porque ésta no cumple con el inciso (b).

Los incisos (c) y (d), se relacionan con que las t.r. preservan los "tamaños" de segmentos y ángulos, que más adelante podremos definir.

En relación con el inciso (e): Sabemos que la composición de dos t.b. y la inversa de una t.b. son también t.b. Así que seguramente la composición de dos t.r. y la inversa de una t.r. nos dan t.b. El axioma agrega que ellas también son t.r.: En otras palabras, el conjunto de las t.r., (que no es vacío en virtud del inciso (f)), es cerrado ante operaciones de composición y de inversa. Esto suele resumirse diciendo que el conjunto de las t.r. de Ω junto con la operación de composición es un grupo; y que es un subgrupo del grupo de las t.b. de Ω.

El inciso (f) del axioma tiene varios aspectos: Dado un semiplano, a pesar de que hay muchísimos puntos del espacio, infinitos, que no pertenecen a ese semiplano, si se conocen las imágenes de los puntos del semiplano quedan determinadas las imágenes de todos los puntos del espacio. Más aun, en realidad alcanza con conocer globalmente las imágenes de una semirrecta y un semiplano de borde esa semirrecta. (Puede asombrarnos que no se pida dar también la imagen de un semiespacio de borde el semiplano, pero eso ya queda determinado al pedir que se preserve la orientación del espacio). Además, asegura que no importa cómo elijamos los pares semirrecta, semiplano, siempre con la semirrecta contenida en el borde del semiplano: siempre hay exactamente una t.r. que envía un par al otro.

Como consecuencia de lo anterior, existen muchísimas t.r., infinitas. Y una de ellas tiene que ser la identidad que es la composición de cualquier t.r. con su inversa.

También podemos afirmar que hay infinitas t.b. de Ω que no son t.r.: basta con que la t.b. no cumpla con alguno de los incisos (a), (b), (c) o (d) para que no sea t.r. Por ejemplo una t.b. que deje fijos a todos los puntos de Ω con excepción de dos, a los que intercambia, no será una t.r.

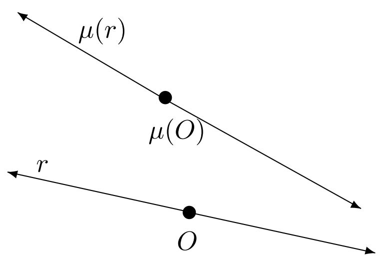
10. Algunas propiedades de las transformaciones rígidas

Las t.r. preservan muchas "formas" de figuras

El axioma nos dice que puntos alineados van a dar a puntos alineados. También ocurre que puntos no alineados van a dar a puntos no alineados.

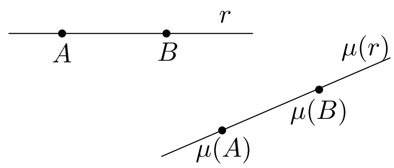
En base a que las t.r. preservan la alineación y la relación estar entre, es fácil justificar que las imágenes, por una t.r. de una recta, un plano, una semirrecta, un semiplano, un semiespacio, un segmento, un ángulo, un triángulo son respectivamente una recta, un plano, una semirrecta, un semiplano, un semiespacio, un segmento, un ángulo, un triángulo. Y que las imágenes de los puntos o subconjuntos "especiales" de esas figuras—origen de semirrecta, extremos de segmentos, borde de semiplano, vértice de ángulo, etc.—son los puntos o subconjuntos especiales de sus imágenes.

Por ejemplo, si r es una recta y O es un punto de la misma, O divide a los puntos de $r - \{O\}$ en dos semirrectas abiertas; también ocurrirá, en cualquier t.r. μ que $\mu(O)$ divide a $\mu(r) - \mu(\{O\})$ en dos semirrectas abiertas, con origen en $\mu(O)$; ellas serán las imágenes por μ de las semirrectas abiertas de r de origen O.



También, si τ es una t.r. y A y B son dos puntos distintos, entonces,

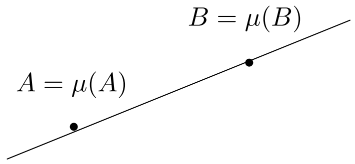
$$\tau(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{\tau(A)\tau(B)} \qquad \tau(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\tau(A)\tau(B)} \qquad \tau(\overset{\circ}{\overrightarrow{AB}}) = \overset{\circ}{\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)}} \qquad \tau(\overline{AB}) = \overline{\tau(A)\tau(B)}$$



Naturalmente, si τ es una t.b. pero no es una t.r. entonces no es obligatorio que valga lo anterior.

Propiedades sobre puntos fijos y conjuntos estables en t.r.

Proposición. *Si dos puntos distintos son fijos en una t.r. entonces la recta determinada por ellos tiene todos sus puntos fijos.*

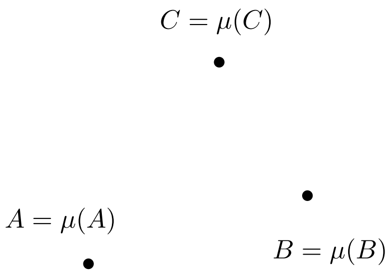


Todos los puntos de $\overleftrightarrow{AB}$ serán puntos fijos en la t.r. μ.

Demostración. Sean A y B distintos, con $\mu(A) = A$ y $\mu(B) = B$.

- Si $C \in \overset{\circ}{\overrightarrow{AB}}$ entonces $C' \in \overset{\circ}{\overrightarrow{A'B'}} = \overset{\circ}{\overrightarrow{AB}}$. Entonces C y C' están de un mismo lado de A y ocurrirá ya sea $\overline{AC} \subset \overline{A'C'}$ o $\overline{A'C'} \subset \overline{AC}$ Como por el axioma de las t.r. no puede ocurrir que un segmento se transforme en una parte propia, concluimos que deben ocurrir las dos cosas y en definitiva $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.
- Para C perteneciente a la semirrecta abierta opuesta a la $\overset{\circ}{\overrightarrow{AB}}$, la demostración es similar, queda como ejercicio. ∎

Proposición. *Si tres puntos no alineados son fijos en una transformación rígida, entonces todos los puntos del espacio son fijos, es decir la transformación es la identidad.*



Todos los puntos del espacio serán fijos en la t.r. μ

Demostración. Sean P, Q y R tres puntos no alineados que quedan fijos en una t.r. μ. Sea α el semiplano de borde $\overleftrightarrow{PQ}$ que contiene a R. μ transforma la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$ en ella misma y el semiplano α en sí mismo. Pero la transformación identidad también hace eso y como sólo existe una t.r. en tales condiciones, debe ocurrir $\mu = \text{id}$. ∎

Proposición. *Sea μ una t.r., α un semiplano y $\alpha' = \mu(\alpha)$. Si α y α' están ambos contenidos en un plano α_o, entonces α_o es estable en μ, es decir $\mu(\alpha_o) = \alpha_o$.*

Demostración. Observamos que α_o es el único plano que contiene a α y también es el único plano que contiene a α'.
Como $\alpha \subset \alpha_o$, tendremos $\alpha' = \mu(\alpha) \subset \mu(\alpha_o)$. Y $\mu(\alpha_o)$ tiene que ser un plano. Pero entonces no puede ser otro que α_o. ∎

Ejercicio 10.1.- Demostrar:

Proposición. *Sea μ una t.r., a una semirrecta y $a' = \mu(a)$. Si a y a' están ambas contenidas en una recta a_o, entonces a_o es estable en μ, es decir $\mu(a_o) = a_o$.*

Ejercicio 10.2.- De cierta t.r. rígida μ se sabe que $\mu(A) = B$, $\mu(C) = D$ y $\mu(E) = F$, y todos los puntos nombrados son distintos.

- ¿Alguno de los puntos nombrados será fijo en μ?
- ¿Habrá algún punto que sea fijo en μ? (Justificar que la respuesta tiene que ser algo del estilo: No hay datos suficientes).

Las t.r. preservan concurrencia y paralelismo

Proposición. *Las imágenes de dos rectas distintas concurrentes son concurrentes. De otro modo, las t.r. preservan la concurrencia de rectas.*

Demostración. Sean a y b rectas. Si existe un punto P tal que $P \in a \cap b$ entonces el punto $\mu(P)$ cumplirá $\mu(P) \in \mu(a) \cap \mu(b)$, es decir $\mu(a)$ y $\mu(b)$ son concurrentes. ∎

Proposición. *Las imágenes de dos rectas paralelas por una t.r. μ son paralelas. Más brevemente las t.r. preservan el paralelismo de rectas.*

Demostración. Sean a y b rectas con $a \parallel b$ y μ una t.r.

- Si $a = b$ es inmediato que $\mu(a) = \mu(b)$ y por lo tanto $\mu(a) \parallel \mu(b)$.
- Si $a \neq b$ entonces a y b son coplanares y además su intersección es vacía. En esas condiciones también $\mu(a)$ y $\mu(b)$ son coplanares y se cumple, por ser μ una t.b.,

$$\mu(a \cap b) = \mu(a) \cap \mu(b) \quad \text{es decir} \quad \emptyset = \mu(\emptyset) = \mu(a) \cap \mu(b).$$

  Es decir $\mu(a) \parallel \mu(b)$ ∎

Proposición. *Las imágenes de dos rectas alabeadas por cualquier t.r son alabeadas.*

Demostración. Sean a y b dos rectas, $a' = \mu(a)$, $b' = \mu(b)$ donde μ es una t.r. Se cumplirá $\mu^{-1}(a') = a$ y $\mu^{-1}(b') = b$ donde μ^{-1} es la t.r. inversa de la μ. Si a y b son alabeadas, es porque no son coplanares, en especial son distintas, y por lo tanto no son paralelas ni concurrentes. Para a' y b' tenemos, en principio, tres posibilidades: o bien $a' \parallel b'$ o bien a' y b' concurrentes o bien a' y b' alabeadas. Veamos que las dos primeras no pueden ocurrir por lo que sólo nos quedará la tercera posibilidad.

- Si fuera $a' \parallel b'$ como μ^{-1} preserva el paralelismo, sería $a \parallel b$ contradiciendo a $a \nparallel b$.
- Si fueran a' y b' concurrentes como μ^{-1} preserva la concurrencia serían a y b concurrentes contradiciendo a que no lo eran. ∎

En forma similar se demuestra que las t.r. preservan el paralelismo o no paralelismo de planos.

11. Congruencia de conjuntos, subconjuntos de Ω

A las t.r. se las suele designar también como **movimientos** o **congruencias**.
Definición. Los conjuntos de puntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se dicen **congruentes** y se denota, con $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, si existe alguna t.r. μ en la que $\mu(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Es inmediato que cualquier subconjunto de Ω es congruente consigo mismo: La imagen del conjunto por la t.r identidad es el mismo conjunto.

También dos rectas cualesquiera son congruentes. Y lo mismo ocurre con dos semirrectas, dos planos, dos semiplanos, dos semiespacios. Pero no siempre dos segmentos son congruentes. Por ejemplo, y de acuerdo con el axioma de las t.r. ningún segmento es congruente con otro que sea parte propia de él.

Propiedades de la congruencia de conjuntos

Proposición. *La congruencia de subconjuntos de puntos es simétrica, reflexiva y transitiva. Es decir que si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son subconjuntos de puntos de Ω, entonces,*

$$\begin{aligned} \textit{simétrica:} &\quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \quad \textit{si y sólo si } \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}, \\ \textit{reflexiva:} &\quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \textit{ para cualquier conjunto } \mathcal{A}, \\ \textit{transitiva:} &\quad \textit{Si } \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \textit{ y } \mathcal{B} \equiv \mathcal{C} \textit{ entonces } \mathcal{A} \equiv \mathcal{C}, \end{aligned}$$

Demostración.

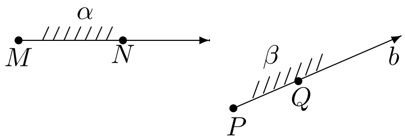
- **simetría** • Si hay una t.r. μ en la que $\mu(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ entonces con la t.r. inversa se cumple $\mu^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$
- **reflexividad** • Podemos utilizar, como t.r. para transformar a cualquier conjunto en sí mismo, a la identidad.

- **transitividad** • Si μ_1 y μ_2 son t.r. también lo es $\mu_2 \circ \mu_1$. Y si $\mu_1(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ y $\mu_2(\mathcal{B}) = \mathcal{C}$, entonces $\mu_2 \circ \mu_1(\mathcal{A}) = \mu_2(\mathcal{B}) = \mathcal{C}$. ∎

Proposición. *Hay pares de conjuntos que no son congruentes. En particular, no hay segmentos congruentes tales que uno sea parte propia del otro. Tampoco hay sectores angulares, con igual vértice, congruentes y tales que uno sea parte propia del otro.*

Demostración. Estas propiedades son consecuencia inmediata del axioma de las t.r., incisos (c) y (d). ∎

Teorema. (Transporte del segmento) *Dados un segmento $\overline{MN}$, y una semirrecta b de origen P, existe un único punto $Q \in b$ tal que $\overline{PQ} \equiv \overline{MN}$.*



Demostración.

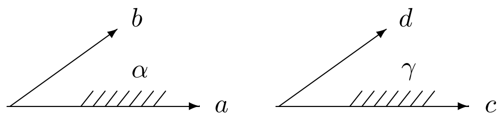
- **Existencia:** • Veamos que hay soluciones para Q.

  Pensemos en una t.r. μ que envíe $\overrightarrow{MN}$ a b y uno cualquiera de los semiplanos de borde $\overleftrightarrow{MN}$ a uno de los semiplanos de borde b (es decir de borde la recta que contiene a b). Por el axioma de las t.r., luego de elegir los semiplanos, hay exactamente una en esas condiciones. Se cumplirá $\mu(M) = P$. Sea $Q = \mu(N)$. Ciertamente, también $\mu(M) = P$ y en consecuencia $\mu(\overline{MN}) = \overline{PQ}$ por lo que $\overline{MN} \equiv \overline{PQ}$.

- **Unicidad:** • Si bien dijimos que hay una única t.r. en las condiciones anteriores, podríamos cambiar de semiplanos de borde $\overleftrightarrow{MN}$ y de borde b. O incluso podríamos pensar en una t.r. que enviara N a P y M al Q. Es importante convencerse de que, no importa cual t.r. tomemos, el resultado para Q es único.

  Sean Q_1, Q_2 puntos solución para el punto Q buscado. Ambos estarán contenidos en la semirrecta b y, con seguridad, uno de ellas pertenecerá al segmento determinado por P y el otro. Supongamos que, por ejemplo, $Q_2 \in \overline{PQ_1}$, lo que equivale a $\overline{PQ_2} \subset \overline{PQ_1}$. Como además $\overline{PQ_1} \equiv \overline{MN}$ y $\overline{PQ_2} \equiv \overline{MN}$, tendremos por transitividad de la congruencia $\overline{PQ_1} \equiv \overline{PQ_2}$ y eso sólo es posible con $Q_1 = Q_2$ (de otro modo tendríamos un segmento congruente con una parte propia de él). ∎

Teorema. (Transporte del ángulo) *Dado un ángulo $\widehat{ab}$, una semirrecta c y un cierto semiplano γ de borde c, existe una única semirrecta $d \subset \gamma$ tal que $\widehat{cd} \equiv \widehat{ab}$.*



Demostración.

- **Existencia:** • Sea α el semiplano de borde a que contiene a b.

  Pensemos en la única t.r. μ en la que $\mu(a) = c$ y $\mu(\alpha) = \gamma$. Sea $d = \mu(b)$. Ocurrirá que $\mu(\widehat{ab}) = \widehat{cd}$, por lo que d cumple con lo pedido. (También hay otra t.r. ν con $\nu(a) = d$ y $\nu(\alpha) = \ldots$).

- **Unicidad:** • Veremos que si suponemos que hay dos soluciones distintas para d llegamos a una contradicción:

  En primer lugar, si dos semirrectas distintas, ambas con el mismo origen que la semirrecta c, son interiores al semiplano γ, obligatoriamente ocurrirá que una es interior al ángulo formado por la otra con c.

  Entonces, si tuviéramos dos soluciones distintas para d, podríamos llamarlas d_1 y d_2, con d_2 interior al ángulo $\widehat{cd_1}$. Como se cumpliría además que

  $$\widehat{cd_1} \equiv \widehat{ab}, \qquad \widehat{cd_2} \equiv \widehat{ab}$$

  por propiedades de la congruencia tendríamos que

  $$\widehat{cd_1} \equiv \widehat{cd_2}$$

  y también los sectores angulares correspondientes serían congruentes. Pero ambos sectores angulares tienen igual vértice y el del ángulo $\widehat{cd_2}$ sería una parte propia del sector angular del ángulo $\widehat{cd_1}$; eso estaría en contradicción con el axioma de las t.r.

  Entonces no puede ocurrir que haya dos soluciones distintas. ∎

Si queremos obtener el transformado de una figura paso a paso, deberemos realizar, en el orden adecuado, transportes de segmentos y ángulos.

Para materializar el transporte de un segmento podremos ayudarnos con una regla a la que podamos marcar, aunque no se necesita que esté graduada; o bien una hoja de papel con un borde recto en el que marcaremos puntos para un segmento congruente; o bien un compás que mantenga la abertura.

Para materializar el transporte de ángulos puede usarse el transportador de ángulos habitual, aunque no se necesita que esté graduado; o una porción de papel con un borde recto con una marca para hacer coincidir con el vértice; por ejemplo una porción de papel triangular.

De cualquier modo, la justificación o demostración de propiedades las hacemos utilizando los teoremas de transporte de segmentos y ángulos.

Transporte global con papel transparente

El método siguiente tiene muy poca precisión de dibujo; pero quizás tiene la virtud de convencer al estudiante de la importancia del inciso (f) de las t.r.

Desde el punto de vista práctico, para concretar ilustraciones o dibujos de figuras planas congruentes con otras, en forma global, aceptamos que podemos materializar una transformación rígida moviendo un papel transparente donde hemos calcado elementos que interesan como pertenecientes al dominio de la t.r.

Si la t.r. está dada mediante: imágenes de un par (semirrecta, semiplano), con :

$$\begin{cases} \mu(a_1) = a_2 \\ \mu(\beta_1) = \beta_2 \end{cases}$$

y queremos encontrar las imágenes por μ de P, Q, R, $\ldots$, deberemos:

(a). Calcar en el papel transparente a:

$$a_1, \quad \beta_1, \quad P, \quad Q, \quad R\ldots;$$

(b). Mover el papel transparente hasta conseguir que la copia de a_1 se superponga sobre a_2 y la copia de β_1 sobre β_2 (Siempre se podrá onseguir eso, quizás a costa de tener que dar vuelta al papel de calco)

(c). Marcar las imágenes de P, Q, R, $\ldots$, debajo de las copias de esos puntos sobre el calco.

Capítulo IV

Simetría central y simetría axial en un plano

1. Introducción

Comenzaremos a estudiar las t.r. del espacio que tienen a algún plano π como conjunto estable. Diremos que se trata de **transformaciones rígidas del plano** π y nos concentraremos en estudiar las propiedades relacionadas con los puntos de ese plano. Sin embargo, no dejaremos de pensar que, junto con los puntos del plano, se "mueven" todos los puntos del espacio; es decir, todos y cada uno de los puntos del espacio tendrán su imagen por la t.r. en estudio.

Sabemos, por el axioma de las t.r., inciso (f), en pág. 33, que una cualquiera de ellas queda determinada cuando se dan una semirrecta y su correspondiente y un semiplano con borde la primer semirrecta —más precisamente con borde la recta que incluye a la semirrecta— y su correspondiente. Empezaremos analizando los casos más sencillos en que las dos semirrectas coinciden o son opuestas y los semiplanos coinciden o son opuestos: simetrías centrales en un plano o axiales. En cada uno de esos casos, el plano que incluye a uno de los semiplanos también incluirá al otro y será estable en la t.r.

Usaremos frecuentemente que, gracias a que las t.r. preservan la relación "estar entre" y la "alineación" (y en consecuecia la de "ser coplanares", etc.,) se cumplirá: si μ es una t.r.

- La imagen por μ del origen de una semirrecta dada será origen de la imagen de la por μ de la semirrecta dada. (Se generaliza a borde de semiplanos y a borde de semiespacios)

- La imagen por μ de la opuesta de una semirrecta dada será la semirrecta opuesta de la imagen por μ de la semirrecta dada. (Se generaliza a semiplanos opuestos y a semiespacios opuestos)

- La imagen por μ de la única recta que incluye a auna semirrecta dada es la única recta que incluye a la imagen por μ de la semirrecta dada. (Se generaliza al único plano que incluye un semiplano)

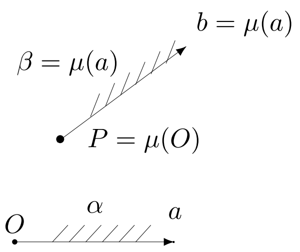
A medida que avancemos, seremos menos cuidadosos en nombrar, en cada demostraciòn, todas las propiedades teoremas o axiomas que estamos utilizando; lo haremos con el convencimiento de que el lector podrá, si tiene interés, detectar esas omisiones y completar las justificaciones.

2. Transformaciones rígidas directas o inversas en un plano

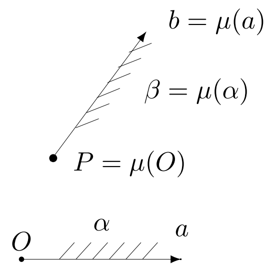
Sabemos que un par (semirrecta, semiplano) adecuado —es decir con borde de semiplano que incluye a la semirrecta— y sus imágenes por cierta t.r. μ determinan completamente a μ. Notemos que estos pares cumplen todo lo necesario para ser **pares orientadores** para los planos que incluyen al semiplano (Ver pág. 30).

Así que una t.r. queda determinada cuando damos un par orientador para cierto plano y la imagen por la t.r. de ese par orientador.

Para el caso en el que los dos pares orientadores que utilizamos para definir una t.r μ son coplanares en cierto plano π — y por lo tanto π será estable en μ— podremos preguntarnos si ambos pares orientan o no a π de la misma manera; y según lo que ocurra, diremos que la t.r. es **directa** en π o o **inversa** en π.



μ es directa en π



μ es inversa en π

El hecho de que una t.r. μ sea directa o inversa en un plano dado, se puede entender intuitivamente del modo siguiente: Sea a una semirrecta y α un semiplano del plano π de borde a. Sea $b = \mu(a)$ y $\mu(\alpha) = \beta$ con β también incluido en π. Imaginemos caminar sobre el plano π, como si éste fuera el piso, primero por la semirrecta a, avanzando en el sentido indicado por ella, y luego por la semirrecta b, en el sentido de b. Si α y β quedan ambos a la izquierda o ambos a la derecha de a y b respectivamente, entonces μ será directa en μ. Si en cambio α queda a la izquierda y β a la derecha, o al revés, entonces μ será inversa.

Dado que hemos aceptado que todas las t.r. preservan la orientación del espacio, el que ambos pares orienten a π del mismo modo está asociado a que los semiespacios de borde π sean estables. Intuitivamente, si pensamos en hacer transporte global para materializar una t.r. en la que un plano es estable, si no es necesario dar vuelta al papel de calco, entonceslos semiespacios son estables; y no lo son si hay que darlo vuelta.

Damos la siguiente definición:

Definiciones.

- Sea μ una t.r. en la que $\mu(b) = c$ y $\mu(\beta) = \gamma$ donde (b, β) y (c, γ) son pares orientadores par un plano π. Diremos que μ **preserva la orientacion** de π si los pares (b, β) y (c, γ) dan la misma orientación a π.
- De una t.r. en la que cierto plano π es estable, diremos que es una **t.r. directa en** π si preserva la orientación de π; y diremos que es una **t.r. inversa en** π en caso contrario.

Nota. Observar que usamos la palabra "inversa" con dos significados bien distinguibles. Una transformación rígida μ y "su transformación inversa" μ^{-1}, si tienen a cierto plano *pi* como estable en ellas, pueden ser ambas "directas en ese plano" o ambas "inversas en ese plano".

3. Algunas definiciones

Utilizando el concepto de "conjuntos congruentes" (ver pág. 36) es posible dar las siguientes definiciones.

Definiciones.

- Se dice que el punto M es <u>un</u> punto medio del segmento $\overline{AB}$ si $M \in \overline{AB}$ y $\overline{MA} \equiv \overline{MB}$.
- Se dice que un ángulo es **recto** si es congruente con uno de sus ángulos adyacentes. (¡Ahora no hablamos de grados!. Posteriormente diremos que un grado es tal que un recto mide 90 grados).
- Se dice que dos rectas son **perpendiculares** si las rectas contienen los dos lados de un ángulo recto. También se dice que cada una de las rectas es perpendicular a la otra. Con $r \perp s$ se denota que r es perpendicular a s.
- Se dice que una recta m es <u>una</u> **mediatriz** de un segmento $\overline{AB}$ si $m \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $m \cap \overline{AB} = \{M\}$ con M punto medio de $\overline{AB}$.
- Se dice que la semirrecta b es <u>una</u> **bisectriz** de un ángulo $\widehat{rs}$, donde b, r, s son semirrectas de igual origen si los ángulos $\widehat{br}$ y $\widehat{bs}$ son congruentes y la semirrecta b es interior al ángulo $\widehat{rs}$.
- Se dice que P es **pie de la perpendicular** desde un punto R a una recta s si hay una recta perpendicular a s que pasa por R y por P.

Hemos subrayado "un" y "una" en esas definiciones para llamar la atención de que, por ejemplo, no hemos usado la expresión <u>el</u> punto medio, <u>la</u> mediatriz, <u>la</u> bisectriz. Y es que aún no hemos justificado que realmente existe exactamente un punto, una recta — en cada plano que incluya al segmento — , una semirrecta en esas condiciones. Cuando lo hayamos hecho, usaremos <u>el</u> y <u>la</u>.

4. Simetría central en un plano

Definiciones. Se llama **simetría central en un plano** π a cualquier t.r. para la que exista un par de semirrecta y semiplano incluidos en π, (a, β) — donde β es uno de los semiplanos cuyo borde incluye a la semirrecta a—, tal que $\sigma(a)$ es la semirrecta opuesta de a y $\sigma(\beta)$ es el semiplano opuesto de β.: Al origen de a se le llama **centro de la simetría central** en el plano π.
Si el centro de la simetría es O, los puntos o los conjuntos contenidos en π,que son correspondientes en esa simetría central de centro O se, dicen **simétricos respecto de** O.

Nota. La frase "en el plano π" sólo puede ser omitida, si no hay dudas acerca de cual es el plano en cuestión.

Para definir a la simetría central en un plano nos hemos apoyado en una cierta semirrecta con origen en el centro de la simetría. Pero veremos muy pronto que esa semirrecta no tiene nada de especial: cualquier otra semirrecta del plano π con igual origen nos servirá para determinar a la misma simetría central, ya que esa semirrecta se transformará en su opuesta opuesta y un semiplano de π de borde esa semirrecta se transformará en su opuesto.

Insistimos una vez más: En realidad cualquier par (semirrecta, semiplano de borde la semirrecta) —aun cuando no sea el centro de la simetría — y sus correspondientes en una t.r. nos sirven para determinarla; pero si la semirrectas y los semiplanos cumplen las condiciones indicadas más arriba, reconoceremos de inmediato que se trata de una simetría central en un plano.

Propiedades de la simetría central en un plano

Sea σ la t.r. tal que:

$$\begin{cases} \sigma(a) = a' \\ \sigma(\beta) = \beta' \end{cases}$$

donde a y a' son semirrectas opuestas de origen O, y β, β' son semiplanos de π opuestos, cuyo borde incluye a las semirrectas. Sea la recta $a_o = a \cup a'$. y el plano $\pi = \beta \cap \beta'$.

(a). $\sigma(O) = O$, $\quad \sigma(a') = a$, $\quad \sigma(\beta') = \beta$, $\quad \sigma(a_o) = a_o$; $\quad \sigma(\pi) = \pi$. Son consecuencia de aplicar las propiedades de pág. 39.

(b). *O es un punto fijo en σ; la recta a_o y el plano π son conjuntos estables en σ.*

Es consecuencia inmediata de lo anterior.

(c). *La simetría central en π es involutiva, por lo que coincide con su inversa. Es decir para puntos cualesquiera $X, Y \in \Omega$, y para subconjuntos cualesquiera $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \subset \Omega$, se cumplirá:*

$$\begin{aligned} \sigma(X) = X' \quad &\textit{si y sólo si} \quad \sigma(X') = X. \\ \sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{M}' \quad &\textit{si y sólo si} \quad \sigma(\mathcal{M}') = \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Es necesario probar $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ y $\sigma \neq \mathrm{id}$.

Seguro que $\sigma \neq \mathrm{id}$ ya que, por ejemplo, $\sigma(a) = a' \neq a$. Nos queda verificar que σ cumple

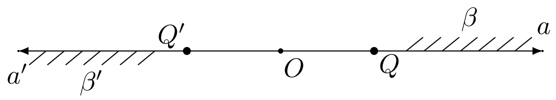
$$\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$$

Para verificar que las t.b. de ambos miembros coinciden necesitaríamos ver como "actúan", o en quien transforman, a cada uno de los puntos del espacio. Pero sabemos que ambos miembros son t.r. por lo que, gracias al axioma de las t.r., inciso (f), en pág. 33, alcanza con verificar que "actúan de igual manera" sobre una semirrecta cualquiera y un semiplano cualquiera de borde esa semirrecta. Elegiremos la semirrecta y el semiplano de modo que el trabajo total sea sencillo: tomaremos la semirrecta a y el semiplano β.

$$\begin{aligned} \sigma \circ \sigma(a) = \sigma(\sigma(a)) = \sigma(a') = a = \mathrm{id}(a). \\ \sigma \circ \sigma(\beta) = \sigma(\sigma(\beta)). = \sigma(\beta') = \beta = \mathrm{id}(\beta) \end{aligned}$$

(d). *La t.r. sigma es directa en el plano π. Los dos semiespacios de borde π son estables* La orientación dada a π por (a, β) y (a, β') es la misma.

(e). *Ningún punto Q de la recta a_o, con excepción del O, es fijo en σ. .*



Sea Q un punto interior de la semirrecta a. Por ser σ una t.b.,

$$\begin{array}{rcl} Q & \in & a-\{O\} \\ \sigma(Q) & \in & \sigma(a-\{O\}) \\ \sigma(Q) & \in & \sigma(a)-\sigma(\{O\}) \\ Q'=\sigma(Q) & \in & a'-\{O\} \end{array}$$

Es decir Q y Q' pertenecen a los interiores de semirrectas opuestas por lo que deben ser distintos. En forma análoga, si Q pertenece al interior de a' se llega a la misma conclusión. Así que si $O \neq Q \in a_o$ entonces $\sigma(Q) \neq Q$.

(f). *Ningún punto del plano π, con excepción del O, es fijo en σ.*

Sólo nos queda por analizar los puntos que pertenecen a alguno de los semiplanos abiertos; la demostración para cualquiera de ellos es similar.

Sea $P \in \beta - a_o$, y $P' = \sigma(P)$. Por ser σ involutiva, también ocurrirá $P = \sigma(P')$. Llegamos a:

$$\begin{array}{rcl} P & \in & \beta - a_o \\ \sigma(P) & \in & \sigma(\beta - a_o) = \sigma(\beta) - \sigma(a_o) \\ P' & \in & \beta' - a_o \end{array}$$

Nota. Fuera del plano π sí hay otros puntos fijos en σ, pero no lo justificaremos ahora. Veremos en pág 67, luego de estudiar perpendicularidad en el espacio, que hay una recta que pasa por O y es perpendicular al plano cuyos puntos son todos fijos.

(g). *Cualquier semirrecta $\overrightarrow{OP}$ del plano π tiene por imagen su semirrecta opuesta. Y cualquier semiplano de π de borde $\overleftrightarrow{OP}$ tiene por imagen su opuesto.*

Ya lo hemos establecido para $\overrightarrow{OP} = a$ y también para $\overrightarrow{OP} = a'$. Nos falta ver qué ocurre con P interior a alguno de los semiplanos: el β o el β'. Supondremos la primera posibilidad. (Para la otra, la demostración es similar).

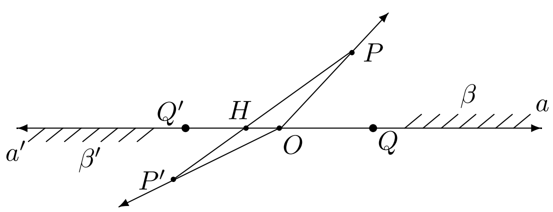


Ilustración de algo imposible:

Si σ es una simetría central

y $\sigma(P) = P'$

No puede ocurrir que $H \neq O$

- Como P y su imagen $\sigma(P) = P'$ están en semiplanos abiertos opuestos de borde a_o, habrá un punto H tal que $\overline{PP'} \cap a_o = \{H\}$.

  Para demostrar que $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP'}$ son opuestas deberemos justificar que P, O y P' están alineados, es decir que $H = O$.

  Deberá ocurrir:

$$\begin{array}{rcl} \sigma(H) \in \sigma(\overline{PP'} \cap a_o) & = & \sigma(\overline{PP'}) \cap \sigma(a_o) \\ & = & \overline{\sigma(P)\sigma(P')} \cap \sigma(a_o) \\ & = & \overline{P'P} \cap a_o \\ & = & \{H\} \end{array}$$

  Así que $\sigma(H) = H$, es decir H es un punto fijo de la recta a_o, por lo que debe ser $H = O$.

- Uno de los semiplanos de π de borde $\overleftrightarrow{OP}$ debe incluir a a. Sea γ tal semiplano.

$$\gamma \supset a \ \text{ y } \gamma \text{ tiene por borde } \overleftrightarrow{OP}$$
$$\sigma(\gamma) \supset \sigma(a) \text{ y } \sigma(\gamma) \text{ tiene por borde } \sigma(\overleftrightarrow{OP})$$
$$\sigma(\gamma) \supset a' \ \text{ y } \sigma(\gamma) \text{ tiene por borde } \overleftrightarrow{\sigma(O)\sigma(P)} = \overleftrightarrow{OP'} = \overleftrightarrow{OP}$$

  Es decir que γ y $\sigma(\gamma)$, tienen igual borde e incluyen a semirrectas opuestas; por lo tanto son semiplanos opuestos.

(h). *O es punto medio del segmento determinado por cada punto del plano π, $(\neq O)$, y su imagen..*
Sea $A \in \pi$, con $A \neq O$, y $A' = \sigma(A)$. Como O es un punto fijo se cumple $\sigma(\overline{OA}) = \overline{OA'}$, es decir $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$. Además, como las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ son opuestas, $O \in \overline{AA'}$.

(i). *Cualquier recta del haz del plano π que pase por O es una recta estable.* Se deja como ejercicio.

(j). *Cualquier recta r del plano π tiene por imagen una r' paralela a ella.*

- Si r y r' no tienen puntos en común, como son coplanares serán paralelas.
- Si tienen algún punto en común:
  Sea $H \in r \cap r'$ y $H' = \sigma(H)$.

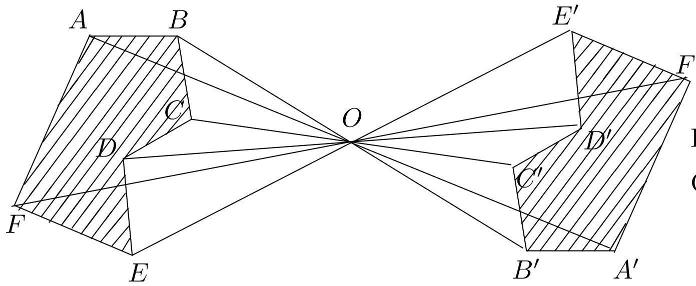
$$\begin{array}{rcl} H & \in & r \cap r' \\ \sigma(H) & \in & \sigma(r \cap r') \\ H' & \in & \sigma(r) \cap \sigma(r') \\ H' & \in & r' \cap r \end{array}$$

Es decir tanto H como su imagen H' pertenecen a r y r'. Dos posibilidades para H, H':

- Si $H = H'$ entonces H es un punto fijo por lo que debe coincidir con O: r pasa por O.
- Si $H \neq H'$, entonces $r = \overleftrightarrow{HH'} = r'$ y O es punto medio de $\overline{HH'}$ por lo que $O \in r$.

En ambos casos $O \in r$. Y ya sabemos que las rectas que pasan por O son estables por lo que $r' = r$ y en consecuencia $r \parallel r'$.

La propiedad que da el nombre a la simetría central en un plano, es la de que el centro es punto medio del segmento determinado por cada punto (distinto de O) y su homólogo. Es también la propiedad que nos hace reconocer rápidamente a las figuras correspondientes en una simetría central.



Figuras simétricas respecto de O
Correspondientes en:
simetría central, de centro O.

Al conjunto “rayado” de vértices A, B, C, D, E y F le corresponde, en la simetría central de centro O, el conjunto “rayado” de vértices A', B', C', D', E' y F'. Y también al segundo le corresponde el primero. (Recordemos que, la simetría central es una t.r. involutiva).

5. Punto medio de un segmento

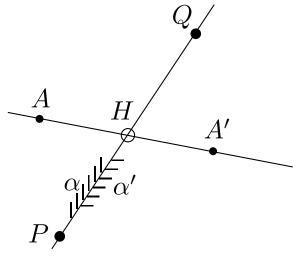
Hemos visto que para puntos del plano π, si dos puntos son correspondientes en una simetría central en el plano π, el segmento que determinan tienen al centro de la simetría como su punto medio. Veremos que cualquier segmento tiene por extremos un par de puntos que son correspondientes en alguna simetría central. En resumen se cumple:

Teorema. (Existencia y unicidad del punto medio) *Cualquier segmento $\overline{PQ}$ tiene exactamente un punto medio.*

Si tenemos un piolín y queremos cortarlo en dos partes iguales lo doblamos haciendo coincidir los extremos. Esto sugiere utilizar, para la demostración siguiente una transformación que envíe la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$ a la $\overrightarrow{QP}$. Y si elegimos bien los semiplanos correspondientes nos encontramos con una t.r. conocida.

Demostración.

- **Existencia:** •



Sea π un plano que contenga a P y a Q. Pensamos en la t.r. que envía la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$ en la $\overrightarrow{QP}$ y a uno de los semiplanos α de π de borde $\overleftrightarrow{PQ}$ en su opuesto α'. Llamémosla σ. Veremos que en esa transformación hay un punto fijo que será punto medio de $\overline{PQ}$. Se cumple que $\sigma(P) = Q$, y por el teorema del transporte, $\sigma(Q) = P$.

- σ *es involutiva, es decir* $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. Lo comprobaremos calculando las imágenes de $\overrightarrow{PQ}$ y de α:
  $\sigma \circ \sigma\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \sigma\left(\sigma\left(\overrightarrow{PQ}\right)\right) = \sigma\left(\overrightarrow{QP}\right) = \overrightarrow{PQ} = \mathrm{id}\left(\overrightarrow{PQ}\right)$
  $\sigma \circ \sigma(\alpha) = \sigma(\sigma(\alpha)) = \sigma(\alpha') = \alpha = \mathrm{id}(\alpha)$.
- La recta $\overleftrightarrow{PQ}$ es estable pues $\sigma\left(\overleftrightarrow{PQ}\right) = \overleftrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)} = \overleftrightarrow{QP} = \overleftrightarrow{PQ}$.
- Elijamos un punto A del interior del semiplano α: $A \in \alpha - \overleftrightarrow{PQ}$. Llamemos $A' = \sigma(A)$. Se cumplirá $\sigma(A') = A \neq A'$. Así que $\sigma\left(\overline{AA'}\right) = \overline{A'A} = \overline{AA'}$, es decir, el segmento $\overline{AA'}$ es estable. Además, al pertenecer A y A' a semiplanos abiertos opuestos, ya que $A' \in \alpha' - \overleftrightarrow{PQ}$, el segmento $\overline{AA'}$ intersectará a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ en un punto. Sea $\{H\} = \overline{AA'} \cap \overleftrightarrow{PQ}$.
- Como $H \in \overline{AA'} \cap \overleftrightarrow{PQ}$ debe ser $\sigma(H) \in \sigma\left(\overline{AA'} \cap \overleftrightarrow{PQ}\right) = \left(\overline{AA'}\right) \cap \sigma\left(\overleftrightarrow{PQ}\right) = \overline{AA'} \cap \overleftrightarrow{PQ} = \{H\}$.
  Por lo tanto $\sigma(H) = H$, es decir, H es un punto fijo en σ.

En consecuencia, $\sigma(\overline{HP}) = \overline{HQ}$, es decir esos segmentos son congruentes.

Y $H \in \overline{PQ}$ porque además de pertenecer a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$, si pensamos en el orden para la recta en el que P precede a Q: se cumplirá:

si ocurriera que H precede a P entonces tendríamos $\overline{HQ} \supset \overline{HP}$ con $\overline{HQ} \neq \overline{HP}$ con lo cual tendríamos un segmento congruente con una parte propia de él en contradicción con el axioma de las t.r. inciso (c), en pág. 33. También se llega a una contradicción si se supone que H sigue a Q. Como tampoco puede coincidir ni con P ni con Q no queda otra posibilidad que H siga a P y preceda a Q.

En conclusión, H es punto medio de $\overline{PQ}$.

Observamos que σ coincide con la simetría central, en el plano π, de centro H, ya que transforma la semirrecta $\overrightarrow{HP}$ en la $\overrightarrow{HQ}$, que es su opuesta; y al semiplano α (que tiene borde $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{HP}$) en el semiplano opuesto α'.

- **Unicidad:** • Puede haber otros modos de encontrar un punto medio para $\overline{PQ}$ pero todos tienen que dar el mismo resultado.

  Cualquier otro punto medio de $\overline{PQ}$ es un punto fijo de la t.r. σ recién utilizada. Como esa transformación tiene un único punto fijo (en π) que es el centro de esa simetría central, cualquier punto medio del segmento $\overline{PQ}$ debe coincidir con el H encontrado anteriormente. ∎

Es importante comprender muy bien algo de la demostración anterior: la definición de simetría central habla de una semirrecta y de su opuesta etc.; y ahora comenzamos con una semirrecta y otra que no era su opuesta y llegamos a que también era una simetría central. Esto no debe asombrarnos: En cada t.r podemos tomar infinitos pares de semirrectas correspondientes, y cada uno, junto con semiplanos adecuados, determinan la transformación. Resumiendo: si nos dicen que en cierta t.r. μ se cumple que $\mu(a) = a'$ y $\mu(\alpha) = \alpha'$ con a y a' semirrectas opuestas y α y α' semiplanos opuestos, entonces podemos asegurar que μ es una simetría central. Pero si nos dicen que $\mu(b) = b'$ y $\mu(\beta) = \beta'$ con b y b', β y β' semirrectas y semiplanos que no son opuestos entonces no podemos decidir, con sólo esos datos, si μ es o no una simetría central.

Corolario. *Si $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$ entonces no sólo es posible transformar con una t.r. P en P' y Q en Q' sino también transformar mediante otra t.r. P en Q' y Q en P'.*

Demostración. Si la primer t.r. es μ, una segunda se consigue con $\sigma \circ \mu$ donde σ es una simetría central, en un plano que incluya a $\overline{PQ}$, con centro en el punto medio de $\overline{P'Q'}$. ∎

Proposición. *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*

Demostración. Sean a y a' semirrectas opuestas de origen O y b y b' semirrectas opuestas también de origen O. Y supongamos que a y b no son opuestas ni coincidentes. Sea α el semiplano de borde a que contiene a b y α' el semiplano de borde a que contiene a b'. Sea σ la simetría central de centro O que envía a a a' y α a α'. σ envía b a b'. Por lo tanto $\sigma(\widehat{ab}) = \widehat{a'b'}$. Por lo tanto $\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}$ ∎

Corolario. *Si dos rectas son perpendiculares entonces los cuatro ángulos determinados por ellas son congruentes.*

Demostración. Por el teorema anterior dadas dos rectas distintas y concurrentes, de los cuatro ángulos que determinan, hay dos opuestos por el vértice que son congruentes y los otros dos también son opuestos por el vértice y concurrentes. Si además uno de los ángulos es congruente a su adyacente, resultará que los cuatro ángulos son todos congruentes entre ellos. ∎

Es decir que dos rectas perpendiculares determinan cuatro ángulos rectos.

6. Simetría axial en un plano

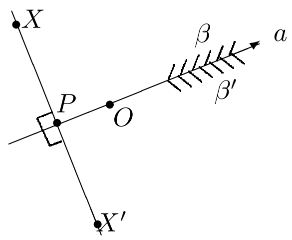
Definiciones.

- Se llama **simetría axial** a cualquier t.r. σ para la que exista un par (a, β) —donde β es un semiplano cuyo borde incluya a la semirrecta a— tal que $\sigma(a)$ es a y $\sigma(\beta)$ es el semiplano opuesto de β. Al borde de β se le llama **eje de la simetría axial**
- Dos puntos o dos conjuntos correspondientes en esta t.r. se llaman **simétricos respecto de** e.

A diferencia de lo que hicimos con las simetías centrales en un plano, aquí no necesitaremos recalcar simetría axial en un plano porque, según veremos, cualquier plano que incluya al eje juega el mismo papel. (pág. 67)

Propiedades de la simetría axial

Sean a y a' semirrectas opuestas de origen O; β y β' semiplanos opuestos de borde $a \cup a' = a_o$, y sea σ la t.r para la que $\sigma(a) = a$ y $\sigma(\beta) = \beta'$.



(a). $\sigma(O) = O$, $\sigma(a') = a'$, $\sigma(\beta') = \beta$, $\sigma(a_o) = a_o$; $\sigma(\pi) = \pi$. Inmediato por aplicación de las propiedades de pág. 39

(b). *El punto O es fijo; las semirrectas a y a', la recta a_o y el plano π son conjuntos estables en σ.* (Y encontraremos en π más puntos fijos y más rectas estables en σ)

Es consecuencia inmediata de lo anterior.

(c). *La simetrìa axial es inversa en el plano π. A un semiespacio de borde π le corresponde el otro.* Los pares (a, β) y (a, β') orientan de modo distinto a π.

(d). *La simetría en π es involutiva, por lo que coincide con su inversa. Es decir para puntos cualesquiera $X, Y \in \Omega$, y para subconjuntos cualesquiera $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \subset \Omega$, se cumplirá:*

$$\sigma(X) = X' \quad \textit{si y sólo si} \quad \sigma(X') = X.$$

$$\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{M}' \quad \textit{si y sólo si} \quad \sigma(\mathcal{M}') = \mathcal{M}.$$

Es necesario probar $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ y $\sigma \neq \mathrm{id}$.

Seguro que $\sigma \neq \mathrm{id}$ ya que, por ejemplo, $\sigma(\beta) = \beta' \neq \beta$. Nos queda verificar que σ cumple

$$\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$$

Lo haremos viendo qué ocurre con las imágenes por σ de a y β.

$$\sigma \circ \sigma(a) = \sigma(\sigma(a)) = \sigma(a) = a = \mathrm{id}(a).$$
$$\sigma \circ \sigma(\beta) = \sigma(\sigma(\beta)). = \sigma(\beta') = \beta = \mathrm{id}(\beta)$$

(e). *Todos los puntos de a_o son fijos.*

Ya tenemos $\sigma(O) = O$. Si $X \in a_o - O$, X pertenecera a la semirrecta a o a la semirrecta a'; ambas estables en σ. Por el transporte del segmento $\sigma(X) = X$

(f). *No hay otros puntos fijos en π.ni fuera de π*

Si $X \in \beta - a_o$ deberá ocurrir que $X' \in \beta' - a_o$, y esos semiplanos abiertos no tienen puntos en común. Lo mismo ocurre si $X \in \beta - a_o$. Y como a cada semiespacio abierto de borde π le corresponde el opuesto, tampoco hay puntos fijos fuera de π.

(g). *Si $X' = \sigma(X)$, con $X' \neq X$ (es decir $X \notin a_o$) entonces la recta $\overleftrightarrow{XX'}$ es estable, corta a a_o en el punto medio del segmento $\overline{XX'}$ y es una recta perpendicular a a_o* En otras palabras, *La recta a_o es mediatriz de cualquiera de los segmentos determinados por un punto (fuera de a_o) y su imagen.*

Por un lado,

$$\sigma(\overleftrightarrow{XX'}) = \overleftrightarrow{\sigma(X)\sigma(X')} = \overleftrightarrow{X'X} = \overleftrightarrow{XX'}$$

Por otro lado, como X y X' pertenecen a semiplanos abiertos opuestos, el segmento que los une debe cortar al borde a_o en un punto; sea X_o ese punto.

$$\overline{X_oX} \equiv \sigma(\overline{X_oX}) = \overline{\sigma(X_o)\sigma(X)} = \overline{X_oX'}$$

Por último, sea Z un punto de a_o distinto de X_o. Ciertamente, $\sigma(Z) = Z$. Veamos qué ocurre con los ángulos $\widehat{XX_oZ}$ y $\widehat{X'X_oZ}$

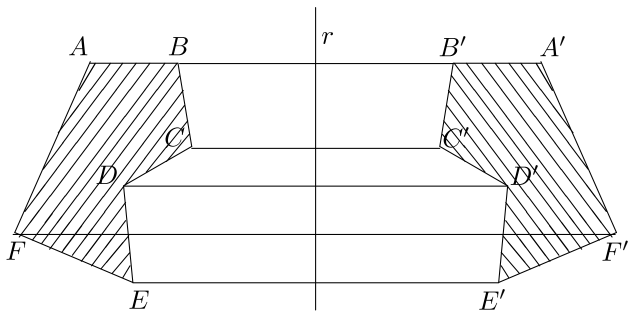
$$\sigma\left(\widehat{XX_oZ}\right) = \widehat{X'X_oZ}$$

Como la semirrecta $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{X_oX}$ es opuesta a la semirrecta $\overset{\circ\!\!\longrightarrow}{X_oX'}$ los ángulos mencionados son adyacentes además de congruentes. Por lo tanto son rectos y $\overleftrightarrow{XX'} \perp a_o$.

(h). *Cualquier recta perpendicular al eje es estable.* Es consecuencia de lo anterior.

(i). *Si una semirrecta p de π tiene su origen en el eje, y no es perpendicular al eje, entonces el eje contiene a la bisectriz del ángulo $\widehat{pp'}$, donde $p' = \sigma(p)$.* (Se deja como ejercicio).

La propiedad que da el nombre a la simetría axial en un plano, es la de que el eje es mediatriz del segmento determinado por un punto (no perteneciente al eje) y su homólogo. Es también la que nos hace reconocer rápidamente a las figuras correspondientes en una simetría axial.



Figuras simétricas respecto de r

Correspondientes en:

simetría axial, de centro O.

Al conjunto “rayado” de vértices A, B, C, D, E y F le corresponde, en la simetría axial de eje r el conjunto “rayado” de vértices A', B', C', D', E' y F'. Y también al segundo le corresponde el primero. (Recordemos que, tanto la simetría central como la axial son t.r. involutivas)

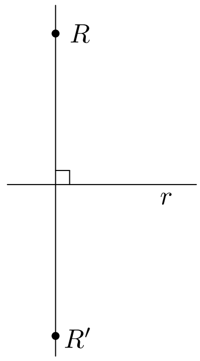
7. Perpendicular a recta en un plano

Teorema. (Existencia y unicidad de la perpendicular a una recta de un plano) *Dados una recta r y un punto R de un plano π existe exactamente una perpendicular a r, contenida en π, que pasa por R.*

Demostración.

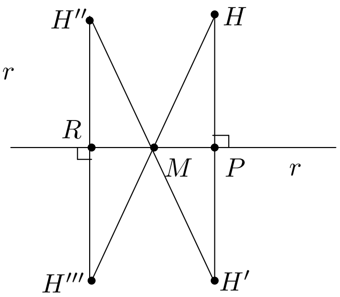
• **Existencia:** • Basta hacer las construcciones indicadas en las figuras.

Caso $R \notin r$



Datos: recta r y punto $R \notin r$
Construcción: Sea σ_r la simetría axial de eje r
$R' = \sigma_r(R)$ Resultado: $\overleftrightarrow{RR'}$
$\overleftrightarrow{RR'} \perp r$ y pasa por R.

Caso $R \in r$



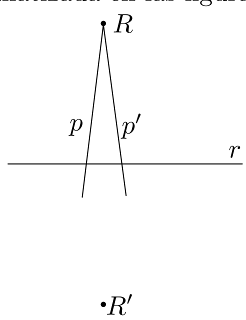
Datos: recta r y punto $R \in r$
Construcción: Sea σ_r la simetría axial de eje r
Elegimos $H \notin r$. Sean $H' = \sigma_r(H)$ $\{P\} = r \cap \overleftrightarrow{HH'}$

- Si $R = P$, entonces $\overleftrightarrow{HH'} \perp r$ y pasa por R.
- Si $R \neq P$, sea Mpunto medio de $\overline{RP}$,

σ_M la simetría central de centro M,
y $\overleftrightarrow{H''H'''} = \sigma_M(\overleftrightarrow{HH'})$
$\overleftrightarrow{H''H'''} \perp r$ y pasa por R.

- **Unicidad:** • Está esquematizada en las figuras.

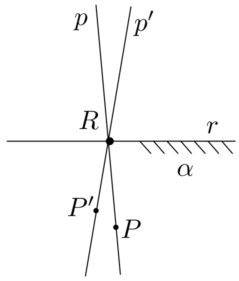
Caso $R \notin r$



$p \perp r$, $p' \perp r$, $\{R\} = p \cap p'$
σ_r: simetria axial eje r
Sea $R' = \sigma_r(R)$, $R \neq R'$
$\sigma_r(p) = p$, $\sigma_r(p') = p'$.
p y p' deben pasar por R'. Deben coincidir.

Es importante notar que, para el caso $R \in r$, nos preocupa la unicidad de la perpendicular dentro del plano π; en todo el espacio no hay una única perpendicular sino infinitas; veremos más adelante que todas ellas están contenidas en un plano (diferente del plano π.

Caso $R \in r$



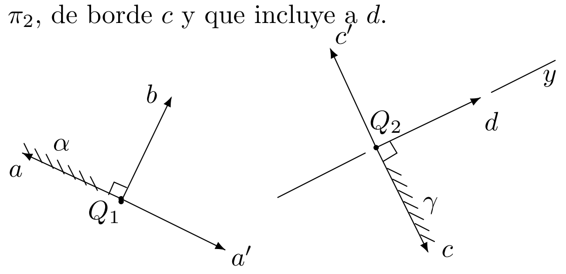
$p \perp r$, $p' \perp r$, $P \in \alpha \cap p$, $P' \in \alpha \cap p'$
σ_p y $\sigma_{p'}$ simetrías de ejes p y p'
$\sigma_p(r) = r$, $\sigma_p(P) = P$, $\sigma_p(\alpha) = \alpha$
$\sigma_{p'}(r) = r$, $\sigma_{p'}(P') = P'$, $\sigma_{p'}(\alpha) = \alpha$
$\sigma_p = \sigma_{p'}$. Los puntos fijos están todos en el eje.
Por lo tanto $p = p'$

■

Ya sabemos que los cuatro ángulos rectos que forman dos rectas perpendiculares son congruentes entre sí; el corolario siguiente nos asegura que todos los ángulos rectos son congruentes, sin que importe qué vértice tengan, cuáles semirrectas sean sus lados, o si son o no coplanares.

Corolario. *Todos los ángulos rectos son congruentes. La perpendicularidad se preserva en las t.r.*

Demostración. Sean $\widehat{ab}$ y $\widehat{cd}$ ángulos rectos de vértices Q_1 y Q_2. Llamemos a' y c' respectivamente a las semirrectas opuestas de la a y la c. Sea α el semiplano, del plano π_1, de borde a y que incluye a b y sea γ el semiplano, del plano π_2, de borde c y que incluye a d.



Sea μ la t.r. que envía a a c y α a γ. (¡No necesitamos saber darle un nombre a esta t.r!). Tendremos:

$$\mu(a) = c, \quad \mu(\alpha) = \gamma, \quad \mu(a') = c', \quad y \quad \mu(b) = h,$$

para cierta semirrecta h (no está ilustrada) incluida en γ y con igual origen que d. Si justificamos que $h = d$ resultará que

$$\widehat{ab} \equiv \widehat{ch} = \widehat{cd}$$

Como $\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b}$, también será $\widehat{ch} \equiv \widehat{c'h}$; es decir que la recta x (no está ilustrada) que incluye a h, incluida en π_2, es perpendicular a la que incluye a c. Como también $\widehat{cd} \equiv \widehat{c'd}$, también la recta y que incluye a d es perpendicular a la que incluye a c. Tanto x como y son perpendiculares a la misma recta, están incluidas en π_2 y pasan por Q_2. Como hay una única perpendicular en esas condiciones, debe ocurrir que $x = y$; por lo tanto $h = d$. ∎

Corolario. *Si tres rectas coplanares a y b y c son tales que a y b son perpendiculares a c, entonces $a \parallel b$.*

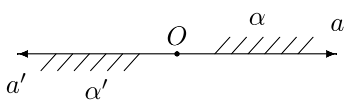
Demostración. Sea π el plano que contiene a a, b y c.

- Caso $a = b$: tendremos $a \parallel b$.
- Caso $a \neq b$: no puede ocurrir que a y b sean concurrentes en un punto, llamémosle H, porque entonces por H tendríamos, en π, dos perpendiculares a c, la a y la b. ∎

Hacemos notar que aún no podemos demostrar un recíproco del corolario anterior: *Si a, b, y c son coplanares y $a \parallel b$ y $a \perp c$ entonces $b \perp c$.* Debemos esperar a poder contar con el axioma de la paralela.

8. Algo más sobre t.r "sencillas"

Terminaremos de analizar las t.r. que transforman una semirrecta en la misma o en su opuesta y un semiplano de borde esa semirrecta en el mismo o en su opuesto. Sean a y a' semirrectas opuestas de origen O; α y α' semiplanos opuestos de borde $a \cup a' = a_o$. Pensemos en las t.r. sugeridas por las columnas de la tablita, que envíen la semirrecta a a ella misma o a su opuesta a' y el semiplano α a él mismo o a su opuesto α'. En todas ellas el plano $\pi = \alpha \cup \alpha'$ es estable.

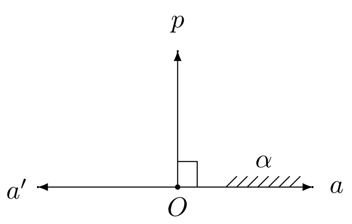


	(1)	(2)	(3)	(4)
a	a	a'	a	a'
a'	a'	a	a'	a
α	α	α'	α'	α
α'	α'	α	α	α'

La columna (1) corresponde a la transformación identidad. La (2) corresponde a una simetría central de centro O, en el plano π. La (3) corresponde a una simetría axial de eje a_o y la (4) veremos que corresponde a una simetría axial de eje una recta perpendicular a a_o por O.

Proposición. *Sean a, a' semirrectas opuestas de origen O, con $a_o = a \cup a'$ y α uno de los semiplanos de π de borde a_o. Si una t.r. μ cumple que $\mu(a) = a'$ y $\mu(\alpha) = \alpha$, entonces μ es la simetría axial, que tiene por eje la recta de π perpendicular a a_o por el punto O.*

Demostración. Sea p_o una recta perpendicular a a_o por O y p una de las semirrectas de p_o de origen O. Sea σ_p la simetría axial de eje p_o. Justificaremos que $\sigma_p = \mu$, verificando que ambas t.r. actúan del mismo modo sobre a y α, donde α es el semiplano de borde a_o que incluye a p_o.



$\sigma_p(a) = a'$, porque a está contenida en la recta estable perpendicular al eje por O, y a y a' están a distinto lado del eje p_o.
Como p es interior al semiplano α, debe ocurrir que $\sigma_p(p)$ sea interior al semiplano $\sigma_p(\alpha)$; y este semiplano debe tener por borde, la recta que contiene a $\sigma_p(a) = a'$. Pero $\sigma_p(p) = p$. Así que debe ocurrir que $\sigma_p(\alpha) = \alpha$.
Por lo tanto las imágenes de a y de α por las t.r μ y σ_p coinciden y en consecuencia $\mu = \sigma_p$.

∎

Observamos que las t.r. sugeridas por las columnas (1) y (2) de la tablita anterior preservan la orientación de π, mientras que las (3) y (4) la invierten. Naturalmente, como la orientación de todo el espacio se preserva, para las t.r. que preservan la orientación de π, los semiespacios de borde el plano π son estables. En cambio para las otras t.r. esos semiespacios son uno correspondiente del otro.

Capítulo V

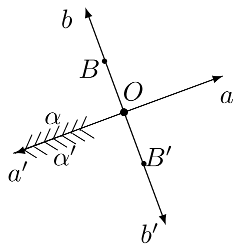
Aplicaciones a ángulos y triángulos

1. Composición de simetrías axiales de ejes coplanarese

Conocer bien todo lo que tiene que ver con simetrías axiales en relación a un plano es teóricamente suficiente para conocer todo acerca de las simetrías centrales en ese plano ya que se cumple:

Proposición. *Dado un punto $O \in \pi$, la simetría central de centro O del plano π se puede expresar como la composición de dos simetrías axiales de ejes dos rectas perpendiculares del plano π que pasan por O.*

Demostración. Sean a y b dos semirrectas perpendiculares del plano π de origen O y a' y b' las semirrectas respectivamente opuestas a a y b. Sea σ_O la simetría central, en el plano π de centro O y σ_a y σ_b las simetrías axiales de ejes la unión de a a' y la unión de b y b' respectivamente. Para demostrar que $\sigma_O = \sigma_a \circ \sigma_b$ alcanza con que veamos que las t.r. de ambos miembros actúan del mismo modo sobre una semirrecta y un semiplano de borde esa semirrecta. Y si elegimos bien la semirrecta y el semiplano, el trabajo de demostrar eso será sencillo. Elijamos, para analizar cómo actúan ambas t.r., a la semirrecta a y al semiplano α, de borde a, que contiene a la semirrecta b. Y para ayudarnos en ese sentido, llamemos α' al semiplano opuesto del α y elijamos un punto $B \in b - \{O\}$.



σ_O: simetría de centro O; $a \perp b$

σ_a, σ_b simetrías de ejes a y b

$\sigma_O = \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$

- Acción de σ_O:
  $\sigma_O(a) = a'$ y $\sigma_O(\alpha) = \alpha'$.
- Acción de $\sigma_a \circ \sigma_b$.
  $\sigma_a \circ \sigma_b(a) = \sigma_a(a') = a'$. (La primera igualdad porque $a \perp b$, y la segunda porque el eje contiene a a').
  $\sigma_a \circ \sigma_b(B) = \sigma_a(B) = B'$, con $B' \in b'$ y O punto medio de $\overline{BB'}$. Como α contiene a B y O está entre B y B', $B' \in \alpha'$, y en consecuencia $\sigma_a \circ \sigma_b(\alpha) = \alpha'$. Por lo tanto, $\sigma_O = \sigma_a \circ \sigma_b$. ∎

También es cierto, queda como ejercicio, que cualquier t.r. en la que un plano sea estable puede expresarse como composición de a lo sumo dos simetrías axiales y o centrales. (Es decir la t.r puede ser una simetría central, o una simetría axial. o puede expresarse como composición de una simetría de cada clase, o como composición de dos simetrías del mismo tipo). O, en definitiva como la composición de a lo sumo tres simetrías axiales.

2. Mediatrices y bisectrices

En el estudio realizado de la simetría axial han aparecido mediatrices y bisectrices: si P es un punto no perteneciente al eje entonces el eje de la simetría axial es mediatriz del segmento determinado por X y su imagen X'; y si p es una semirrecta con origen en el eje de simetría, pero no contenida en él, ni en una recta perpendicular a él, entonces el eje contiene a la bisectriz del ángulo $\widehat{pp'}$ donde p' es la imagen de p en la simetría.

Proposición. *Cada segmento de un plano tiene, en ese plano, una única mediatriz.*

Demostración. Sabemos que una recta es mediatriz de un segmento si y sólo si pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a la recta que contiene el segmento.
Entonces la demostración es inmediata ya que cada segmento tiene un único punto medio, y por ese punto, en el plano en cuestión, hay una única recta perpendicular a la recta que contiene el segmento. ∎

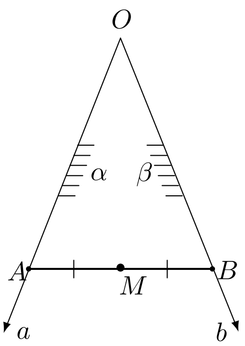
Para simplificar la exposición, aceptaremos decir que un segmento $\overline{AB}$ (o $\overline{A\overset{\circ}{B}}$, o semirrecta $\overset{\circ}{\overrightarrow{AB}}$, etc.) es **perpendicular** a la recta $\overleftrightarrow{CD}$ (o al segmento $\overline{CD}$ o a la semirrecta $\overset{\circ}{\overrightarrow{CD}}$, etc) cuando las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son perpendiculares.

Teorema. *Cualquier ángulo tiene una única bisectriz.*

(Aun no hemos introducido ángulos llanos ni nulos por lo que todos los ángulos tienen por lados semirrectas distintas y no coincidentes). Si tuviéramos un ángulo dibujado en papel y quisiéramos marcar la bisectriz del ángulo, lo doblaríamos de modo de hacer coincidir a los dos lados. Esto, o lo estudiado de simetrías axiales, nos sugiere utilizar, en lo que sigue, una t.r que envíe un lado del ángulo al otro lado

Demostración.

- **Existencia de bisectriz** • Dado el ángulo $\widehat{ab}$, de vértice O, elijamos $A \in a$ y $B \in b$, con A, B distintos de O, y $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$. Sea M el punto medio de $\overline{AB}$. Sea α el semiplano de borde $\overleftrightarrow{OA}$ que contiene a B y β el de borde $\overleftrightarrow{OB}$ que contiene a A
  Sea μ la t.r. que cumple:



$\mu(a) = b$ y $\mu(\alpha) = \beta$. μ es inversa en π.
Es inmediato que $\mu(O) = O$.
Por transporte de ángulo se cumple que $\mu(b) = a$.
Entonces, $\mu(\beta) = \alpha$ y μ es involutiva.
Por transporte de segmentos, se cumple que $\mu(A) = B$ y $\mu(B) = A$.
Y también debe ocurrir $\mu(M) = M$. (Si fuera $\mu(M)$ igual a cualquier otro punto de $\overline{AB}$ llegaríamos al absurdo de un segmento congruente con una parte propia).
$\mu(\widehat{MOA}) = \widehat{MOB}$, es decir $\widehat{MOA} \equiv \widehat{MOB}$
$\overrightarrow{OM}$ es interior al ángulo $\widehat{AOB}$.

  Es decir que $\overrightarrow{OM}$ es una bisectriz de $\widehat{AOB}$.

- **Unicidad de bisectriz** • Sean A, B y M los puntos utilizados en el inciso anterior. Sea σ la simetría axial respecto de $\overline{OM}$. Supongamos que hubiera una bisectriz h distinta de la ya encontrada $\overrightarrow{OM}$. (Hacer una figura ilustrativa). Sería interior a alguno de los ángulos $\widehat{MOA}$ o $\widehat{MOB}$. Su imagen por σ, $h' = \sigma(h)$ sería interior al otro ángulo. Pero entonces:

$$\begin{array}{ccll} \widehat{ha} & \equiv & \widehat{hb} & \text{por ser } h \text{ bisectriz} \\ \widehat{ha} & \equiv & \widehat{h'b} & \text{por ser correspondientes en } \sigma \end{array}$$

  Llegaríamos al absurdo de $\widehat{hb} \equiv \widehat{h'b}$ con ambos ángulos con igual vértice y un sector angular parte propia del otro. ∎

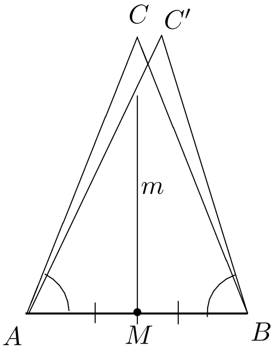
Aunque la demostración está terminada, puede interesar comprobar que la t.r. μ utilizada para la demostración de existencia coincide con la t.r. σ utilizada para la demostración de unicidad. Se deja como ejercicio.

3. Triángulos con dos lados o dos ángulos congruentes. Clasificación de triángulos

Definición. En un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, se dice que el lado $\overline{AB}$ y el ángulo $\widehat{ACB}$ son **opuestos** uno del otro; también $\overline{AC}$ y $\widehat{ABC}$ son opuestos, y $\overline{BC}$ y $\widehat{BAC}$ son opuestos.

Teorema. *Si dos ángulos de un triángulo son congruentes entonces los lados respectivamente opuestos a esos ángulos también son congruentes.*

Demostración. Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ el triángulo con $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ABC}$. El lado opuesto a $\widehat{BAC}$ es el $\overline{BC}$ y el opuesto del $\widehat{ABC}$ es el $\overline{AC}$.
Sea m la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, que corta al segmento en su punto medio M y σ_m la simetría axial de eje m.

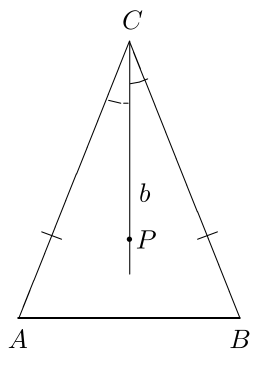


Por propiedades de la simetría axial, $\sigma_m(A) = B$ y $\sigma_m\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{BA}$.
Llamemos $C' = \sigma_m(C)$. Tendremos que $\sigma_m\left(\overline{AC}\right) = \overline{BC'}$ y por lo tanto $\overline{AC} \equiv \overline{BC'}$. (Es decir que la ilustración anterior con C' distinto de C corresponde a una situación imposible).
Sea γ el semiplano de borde $\overleftrightarrow{AB}$. y que incluye a C. Por transporte del ángulo $\widehat{CAB}$ a patir de la semirrecta $\overrightarrow{BA}$ sobre el semiplano γ, y ya que $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ABC}$, tendremos $\sigma_m\left(\widehat{BAC}\right) = \widehat{ABC}$.
Por último, como $C \in \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BC}$ resultará que $C' = \sigma_m(C) \in \sigma_m\left(\overrightarrow{AC}\right) \cap \sigma_m\left(\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AC} = \{C\}$.
Es decir $C' \in \{C\}$, y por lo tanto $C' = C$.
En consecuencia, $\overline{BC'} = \overline{BC}$ y de $\overline{AC} \equiv \overline{BC'}$ obtenemos $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. ∎

También se cumple el recíproco del teorema anterior:

Teorema. *Si dos lados de un triángulo son congruentes entonces los ángulos respectivamente opuestos a esos lados también son congruentes.*

Demostración. Sea $\overset{\triangle}{ABC}$ el triángulo con $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$. Sea b la bisectriz del ángulo $\widehat{ACB}$, y σ_b la simetría axial cuyo eje incluye a b.



Sea P perteneciente a la bisectriz, con $P \neq C$. Por transporte de ángulos, y dado que $\widehat{PCA} \equiv \widehat{PCB}$, se cumplirá $\sigma_b(\overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB}$ y $\sigma_b(\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{CA}$.
Por transporte de segmentos y dado que $\overline{CA} \equiv \overline{CB}$, se cumplirá $\sigma_b(A) = B$ y $\sigma_b(B) = A$.
Pero entonces: $\sigma_b(\widehat{ABC}) = \widehat{BAC}$ y por tanto, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BAC}$. ∎

Definiciones.

- Un triángulo se dice **equilátero** si sus tres lados o sus tres lados o sus tres ángulos son congruentes.
- Un triángulo se dice **isósceles** si tiene un par de lados o un par de ángulos congruentes.
- Un triángulo se dice **escaleno** si no es isósceles.

Por los teoremas anteriores, si un triángulo tiene dos ángulos (o dos lados) congruentes también tiene congruentes los lados (o los ángulos) opuestos. Así que, en las definiciones anteriores, se podía haber mencionado sólo la condición de los ángulos o sólo la condición de los lados. Con las definiciones dadas, cualquier triángulo equilátero resulta isósceles.

Definiciones.

- Dadas una recta r y un punto A se llama **pie de la perpendicular** por A a r, al punto intersección de r con una recta por A perpendicular a r. Si $A \in r$, el pie de la perpendicular coincide con A.

- Dado un $\overset{\triangle}{ABC}$, cualquiera de sus lados puede ser elegido como **base del triángulo**. Elegida una base para el triángulo, se llama **altura del triángulo** (en relación a esa base) al segmento determinado por el vértice opuesto a la base y el pie de la perpendicular desde ese vértice a la recta que incluye a la base. También se llama **altura** a la recta que incluye a ese segmento.

Para los triángulos isósceles que no son equiláteros, es usual elegir como base el lado que no es congruente con los otros dos.

Es inmediato justificar que:

Corolario. (Sobre mediatriz, bisectriz y altura en triángulos isósceles) *Si un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ es isósceles, con $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, o con $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}$, y si M es el punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overleftrightarrow{CM}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y $\overrightarrow{CM}$ es bisectriz de $\widehat{ACB}$. Además eligiendo $\overline{AB}$ como base del triángulo, resulta que $\overline{CM}$ es la altura correspondiente.*

4. Comparaciones entre segmentos y entre ángulos

Definiciones. Dados los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ diremos que el segmento $\overline{AA'}$ es **menor que** el segmento $\overline{BB'}$ y escribiremos $\overline{AA'} < \overline{BB'}$ si existe un punto $H \in \overline{BB'}$ tal que $\overline{AA'} \equiv \overline{BH}$.

- Dados los ángulos $\widehat{aa'}$ y $\widehat{bb'}$ diremos que el ángulo $\widehat{aa'}$ es **menor que** el ángulo $\widehat{bb'}$ y escribiremos $\widehat{aa'} < \widehat{bb'}$ si existe una semirrecta h interior al ángulo $\widehat{bb'}$ tal que $\widehat{aa'} \equiv \widehat{bh}$.

Usando composición de t.r. se justifica que estas relaciones de "menor" para segmentos y para ángulos son transitivas; es decir, son relaciones de orden.

No llega a cumplirse la propiedad de tricotomía: puede haber dos segmentos que no sean ni uno menor que el otro ni el otro menor que el uno y que tampoco sean iguales. Pero sí se cumple la propiedad que llamaremos de casi-tricotomía:

Proposición. *Dados los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ se cumplirá una y sólo una de las condiciones siguientes:*

$$\overline{AB} < \overline{A'B'}, \quad \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{A'B'} < \overline{AB}$$

Proposición. *Dados los ángulos $\widehat{ab}$ y $\widehat{a'b'}$ se cumplirá una y sólo una de las condiciones siguientes:*

$$\widehat{ab} < \widehat{a'b'}, \quad \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}, \quad \widehat{a'b'} < \widehat{ab}$$

Como de costumbre, $\overline{AB} < \overline{CD}$ significa lo mismo que $\overline{CD} > \overline{AB}$ que se lee $\overline{CD}$ es mayor que $\overline{AB}$; y lo mismo ocurre con los ángulos. También utilizaremos los símbolos $\leq$ y $\geq$.

Llamado a la intuición

Recordamos que en cualquiera de los órdenes naturales para los puntos de una recta, no hay ni primer ni último elemento; y entre dos puntos distintos siempre hay otro. Aquí sucede lo mismo con el orden para los segmentos y el orden para los ángulos. Sin embargo nos vamos a encargar de inventar un nuevo segmento y un nuevo ángulo que sean menores que todos los demás, y vamos a inventar un ángulo que sea mayor que todos los demás.

La intuición, y las definiciones dadas, nos dicen que, si en una recta elegimos un punto A y luego pensamos en las posibilidades de elección de otro punto X sobre la recta, recorriendo los puntos de r de acuerdo a un orden natural determinado, cuando nos vamos "acercando" con X a A, obtenemos segmentos $\overline{AX}$ cada vez más pequeños y cuando nos pasamos al otro lado de A y nos vamos "alejando" de A, empieza a crecer de nuevo el segmento $\overline{AX}$.

Si recorremos las semirrectas de un haz prestando atención especial a un semirrecta a y a su opuesta a', a medida que avanzamos, en alguno de los sentidos de giro, yendo de a hasta a' nos vamos encontrando con semirrectas que junto con a determinan ángulos cada vez mas grandes. Luego de pasar por a', los ángulos comienzan a disminuir.

Todo esto nos lleva a introducir lo siguiente:

5. Segmentos nulos. Angulos nulos. Angulos llanos

Aceptamos llamar **segmento nulo** a cualquier conjunto de un sólo punto, y aceptaremos que es un segmento menor que cualquier otro. Aceptaremos también que cualquier segmento es suma de él mismo con el segmento nulo en ese orden o al revés).

Convenimos en llamar **ángulo nulo** al formado por una única semirrecta y **ángulo llano** al formado por una semirrecta y su opuesta. Es decir un ángulo nulo no es ni más ni menos que una semirrecta; y un ángulo llano es una recta y cualquiera de sus puntos servirá como vértice de ese ángulo (habría que indicar expresamente cuál es su vértice, y cuál de los dos semiplanos podríamos considerar su interior).

Aceptaremos que un ángulo nulo es menor que cualquier otro no nulo, y que el ángulo llano es mayor que cualquier otro no llano. Cualquier ángulo es suma de él mismo con el ángulo nulo.

Clasificación de ángulos y triángulos

Definiciones.

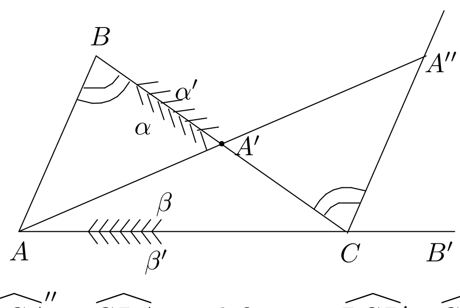
- Un ángulo se dice **agudo** si es menor que un recto.
- Un ángulo se dice **obtuso** si es mayor que un recto.
- Un triángulo se dice **rectángulo** si tiene un ángulo recto.
- Un triángulo se dice **obtusángulo** si tiene un ángulo obtuso.
- Un triángulo se dice **acutángulo** si tiene sus tres ángulos agudos.

Podría pensarse que deberíamos definir más tipos de triángulos por ejemplo darle un nombre especial a un triángulo que tenga dos ángulos rectos y uno agudo. Veremos, luego de definir suma de ángulos, que no es útil inventar más nombres porque sucede que cualquier triángulo tiene, por lo menos, dos ángulos agudos.

6. Comparaciones de lados y ángulos de un triángulo

Teorema. (Primero del ángulo exterior de un triángulo) *En todo triángulo, un ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes.*

Demostración. Dado el $\overset{\triangle}{ABC}$, sea B' perteneciente a la semirrecta opuesta a la $\overrightarrow{CA}$. Veremos que $\widehat{BCB'} > \widehat{CBA}$. Para ello, utilizamos σ, simetría central, en el plano del triángulo, de centro A' punto medio de $\overline{BC}$. Se cumple que, si $A'' = \sigma(A)$, entonces A y A'' están en semiplanos opuestos de borde $\overleftrightarrow{BC}$, y en el mismo semiplano de borde $\overleftrightarrow{AB'} = \overleftrightarrow{AC}$. Es decir que $\overrightarrow{CA''}$ es interior al ángulo $\widehat{BCB'}$ y por lo tanto $\widehat{BCB'} > \widehat{BCA''}$.



Por ser correspondientes en σ, $\widehat{BCA}'' \equiv \widehat{CBA}$. En definitiva, $\widehat{BCB'} > \widehat{CBA}$.
En forma similar, teniendo en cuenta el ángulo opuesto por el vértice del $\widehat{BCB'}$, se demuestra que también es $\widehat{BCB'} > \widehat{CAB}$ ∎

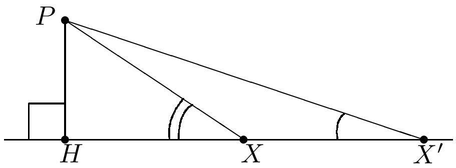
Corolario. *Si un triángulo es rectángulo u obtusángulo entonces tiene dos ángulos agudos.*

Demostración. El ángulo exterior adyacente a un ángulo interior obtuso o recto es agudo o recto. Y debe ser mayor que cualquiera de los otros dos ángulos interiores. Por lo tanto esos otros dos ángulos serán agudos. ∎

Nota. Los triángulos que estudiamos en este curso no son los que podrían "dibujarse" en la superficie de la tierra supuesta esférica (los triángulos esféricos están formados por arcos de circunferencias de radio el de la esfera). Por ejemplo no es difícil imaginar un gran "triángulo" con dos de sus lados incluidos en dos meridianos correspondientes a longitudes que difieran en 90^o y el tercer lado incluido en el ecuador; tendrá sus tres ángulos rectos, y cualquiera de los ángulos exteriores de este gran triángulo es congruente con cualquiera de los ángulos interiores en lugar de ser mayor que los dos no adyacentes.

Corolario. *Sea r una recta y P un punto no perteneciente a ella y H el pie de la perpendicular desde P a r. Sea X cualquier punto de r distinto de H. Entonces el ángulo $\widehat{PXH}$ es agudo. Y si $X' \in r$ con X entre H y X', entonces $\widehat{PX'H} < \widehat{PXH}$*

Demostración.



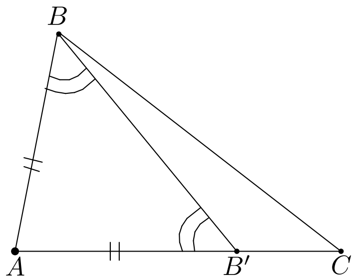
Basta aplicar el teorema del ángulo exterior al triángulo $\overset{\triangle}{PXH}$, para el ángulo exterior de vértice H y el ángulo interior de vértice X; y al triángulo $\overset{\triangle}{PXX'}$, para el ángulo exterior de vértice X y el ángulo interior de vértice X'. ∎

Ejercicio 6.1.- Sea $\widehat{pq}$ un ángulo, X un punto interior al ángulo, y P y Q los pies de las perpendiculares desde X a las rectas que incluyen a los lados del ángulo. Entonces al menos uno de esos pies pertenece a un lado del triángulo.

Teorema. (Mayor lado, mayor ángulo) *En todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo; y recíprocamente, a mayor ángulo se opone mayor lado.*

Demostración. Dado el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, veamos que $\overline{AC} > \overline{AB}$ si y sólo si $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$.

- Si $\overline{AC} > \overline{AB}$, transportamos el segmento $\overline{AB}$ sobre la semirrecta $\overrightarrow{AC}$ y obtenemos $B' \in \overline{AC}$ con $\overline{AB'} \equiv \overline{AB}$.



  La semirrecta $\overrightarrow{BB'}$ resulta interior al ángulo $\widehat{ABC}$, por eso se cumple $\widehat{ABC} > \widehat{ABB'}$.

  El triángulo $\overset{\triangle}{ABB'}$ es isósceles, por lo que $\widehat{ABB'} \equiv \widehat{AB'B}$.

  Por el teorema del ángulo exterior aplicado al $\overset{\triangle}{BB'C}$ y al ángulo exterior $\widehat{BB'A}$ y al interior $\widehat{ACB}$: $\widehat{AB'B} > \widehat{ACB}$.
  Entonces, $\widehat{ABC} > \widehat{ABB'} \equiv \widehat{AB'B} > \widehat{ACB}$ de donde $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$.

- Si $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$, analicemos las tres posibilidades que tenemos para los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ (propiedad de casi-tricotomía); descartaremos dos de ellas:
  - Caso $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$. Aquí el triángulo sería isósceles y tendríamos $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$, en contradicción con la hipótesis.
  - Caso $\overline{AC} < \overline{AB}$. Es lo mismo que $\overline{AB} > \overline{AC}$. Por lo ya demostrado de que a mayor lado se opone mayor ángulo, tendríamos $\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$, en contradicción con la hipótesis.
  - Caso $\overline{AC} > \overline{AB}$. Es el único que nos queda como posible. ∎

Definiciones. En un triángulo rectángulo se llama **hipotenusa** al lado opuesto al ángulo recto, y se llama **cateto** a cualquiera de los otros dos lados (opuestos a los ángulos agudos).

Con esta definición, por el teorema anterior:

Corolario. *La hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo es mayor que cualquiera de sus catetos.*

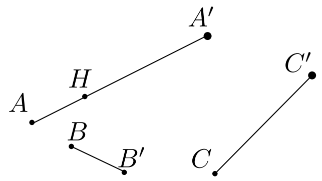
Corolario. *Sea r una recta, P un punto no perteneciente a ella y H el pie de la perpendicular desde P a r. Sea X cualquier punto de r distinto de H. Entonces $\overline{PH} < \overline{PX}$.*

Demostración. Es consecuencia directa del corolario anterior. ∎

7. Suma de segmentos y suma de ángulos

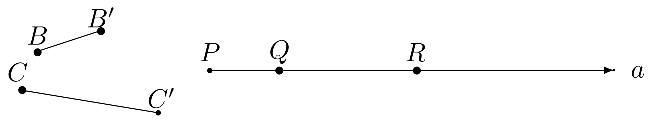
Recordamos que, hasta ahora, los extremos de un segmento son puntos distintos y que los lados de un ángulo son semirrectas distintas y no opuestas.

Definiciones. Se dice que un segmento $\overline{AA'}$ **es suma** de los segmentos no nulos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ si existe un punto $H \in \overset{\circ\!-\!\circ}{AA'}$ tal que $\overline{AH} \equiv \overline{BB'}$ y $\overline{HA'} \equiv \overline{CC'}$. También diremos que cualquier segmento es suma de él y un segmento nulo (en ese orden o al revés). .

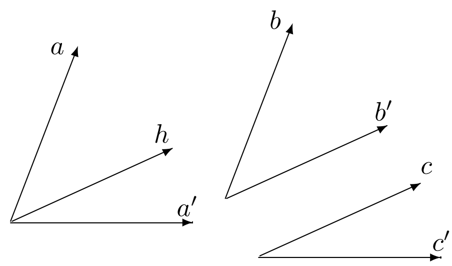


$\overline{AA'}$ es suma de $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$

Dados dos segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ hay muchos segmentos que son suma de ellos dos, y son todos congruentes entre sí. Por cada semirrecta podemos encontrar uno: Sea a una semirrecta de origen P; transportamos el segmento $\overline{BB'}$ a la semirrecta a, y "a continuación" transportamos $\overline{CC'}$; es decir determinamos $Q \in a$ tal que $\overline{PQ} \equiv \overline{BB'}$ y R en la semirrecta opuesta a la $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{QP}$ tal que $\overline{QR} \equiv \overline{CC'}$. El segmento $\overline{PR}$ resulta ser suma de los segmentos dados.



Definiciones. Se dice que un ángulo $\widehat{aa'}$ **es suma** de los ángulos no nulos $\widehat{bb'}$ y $\widehat{cc'}$ si existe una semirrecta h interior al ángulo $\widehat{aa'}$ tal que $\widehat{ah} \equiv \widehat{bb'}$ y $\widehat{ha'} \equiv \widehat{cc'}$. También diremos que cualquier ángulo es es suma de él mismo con el ángulo nulo; (en ese orden o al revés). Además, diremos que cualquier ángulo llano es suma de dos ángulos adyacentes cualesquiera. .



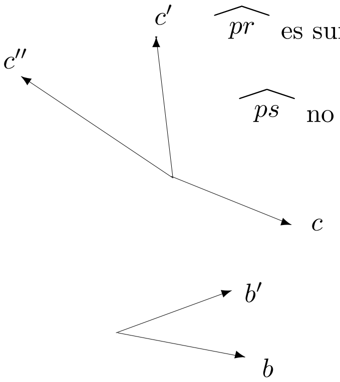
$\widehat{aa'}$ es suma de $\widehat{bb'}$ y $\widehat{cc'}$

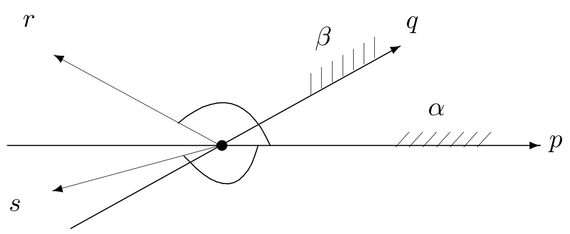
- Dos ángulos se dicen **complementarios** si un ángulo recto es suma de ellos. (Lo abreviaremos diciendo que suman un recto).
- Dos ángulos se dicen **suplementarios** si un ángulo llano es suma de ellos. (Lo abreviaremos diciendo si suman un ángulo llano).

Dados dos ángulos no nulos $\widehat{bb'}$ y $\widehat{cc'}$, no siempre hay ángulos que sean suma de ellos; pero si llega a haber uno, todos los congruentes con él también lo serán. Para decidir si existe un ángulo suma, y en caso afirmativo encontrar uno, se puede elegir cualquier semirrecta p, y un semiplano α de borde p y transportar el ángulo $\widehat{bb'}$ a partir de p sobre α, y luego "a continuación" transportar $\widehat{cc'}$; es decir determinamos una semirrecta $q \subset \alpha$, con igual origen que p, tal que $\widehat{pq} \equiv \widehat{bb'}$ y una semirrecta r en el semiplano opuesto al de borde q que contiene a p, tal que $\widehat{qr} \equiv \widehat{cc'}$. Si esta semirrecta r está incluida en el interior de α, entonces habremos encontrado una solución. Si no, no existirá ningún ángulo que sea suma de los dados.

$\widehat{pr}$ es suma de $\widehat{pq}$ y $\widehat{qr}$; y también de $\widehat{bb'}$ y $\widehat{cc'}$

$\widehat{ps}$ no es suma de $\widehat{pq}$ y $\widehat{qs}$; ni de $\widehat{bb'}$ y $\widehat{cc''}$





Las comparaciones y la suma de segmentos y de ángulos satisfacen muchas de las propiedades esperables. Por ejemplo, las propiedades conmutativas para las sumas se pueden enunciar:

Proposición. *Si $\overline{AA'}$ es suma de $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ entonces también $\overline{AA'}$ es suma de $\overline{CC'}$ y $\overline{BB'}$*

Para la demostración, se puede utilizar la simetría axial respecto de la mediatriz de segmento $\overline{AA'}$. Similarmente,

Proposición. *Si $\widehat{aa'}$ es suma de $\widehat{bb'}$ y $\widehat{cc'}$ entonces también $\widehat{aa'}$ es suma de $\widehat{cc'}$ y $\widehat{bb'}$*

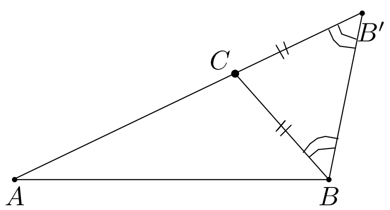
Para la demostración, se puede utilizar la simetría axial respecto de la bisectriz del ángulo $\widehat{aa'}$.

En especial, se cumple que

- *Si un segmento es suma de otros dos no nulos, entonces es mayor que cualquiera de los sumandos.*
- *Si un ángulo es suma de otros dos no nulos, entonces es mayor que cualquiera de los sumandos.*
- *En cualquier suma de ángulos o segmentos se puede sustituir uno de los sumandos por otro congruente con él.*

Teorema. (Desigualdad triangular) *En cualquier triángulo, uno cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos. (*Exagerando el cuidado de nuestras expresiones, deberíamos decir *menor que cualquier segmento que sea suma de los otros dos.)*

Demostración. Dado el $\overset{\triangle}{ABC}$, transportamos el segmento $\overline{CB}$ sobre la semirrecta opuesta a la $\overrightarrow{CA}$, obteniendo B'.



$\overrightarrow{BC}$ resulta interior al ángulo $\widehat{ABB'}$, lo que justifica $\widehat{ABB'} > \widehat{CBB'}$.

Como el triángulo $\overset{\triangle}{CBB'}$ es isósceles, $\widehat{CBB'} \equiv \widehat{CB'B} = \widehat{AB'B}$.

Por lo tanto $\widehat{ABB'} > \widehat{AB'B}$; entonces aplicando al triángulo $\overset{\triangle}{ABB'}$ que a mayor ángulo se opone mayor lado, obtenemos $\overline{AB'} > \overline{AB}$. Esto completa la demostración, ya que el segmento $\overline{AB'}$ es suma de $\overline{AC}$ y de $\overline{BC}$. ∎

Teorema. (Desigualdad poligonal) *Si A_1, A_2, …, A_n son los vértices de una poligonal, entonces el segmento $\overline{A_1A_n}$ es menor que la suma de los lados de la poligonal.*

Demostración. El caso $n = 3$ corresponde a la desigualdad triangular. El caso para $n = 4$ lo podemos demostrar utilizando el caso para $n = 3$:

En general, el caso par un cierto $n = h + 1$ se hace a a partir del caso $n = h$. La formalización de todo esto constituye una demostración por inducción matemática. ∎

8. Equidistancia. Lugares geométricos

Definiciones.

- Se dice que un punto A **equidista de los puntos** B_1, B_2, ..., B_n, si todos los segmentos $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_2}$, ..., $\overline{AB_n}$ son congruentes.
- Se dice que un punto A **equidista de las rectas** r_1, r_2,..., r_n, si todos los segmentos $\overline{AH_1}$, $\overline{AH_2}$, ..., $\overline{AH_n}$ son congruentes, donde los H_i son los pies de las perpendiculares desde A hasta las rectas r_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Se acepta también que si un punto pertenece a dos o más rectas entonces equidista de todas ellas.
- Se llama **lugar geométrico** de los puntos que cumplen determinada propiedad al conjunto de los puntos del espacio que cumplen esa propiedad.

Para demostrar que cierto conjunto $\mathcal{A}$ es el lugar geométrico de los puntos X que cumplen determinada propiedad, hay que justificar dos proposiciones:

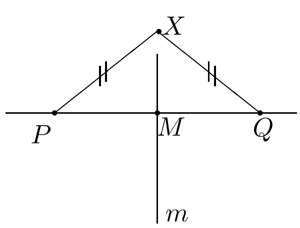
- Si X cumple la propiedad entonces X pertenece al conjunto $\mathcal{A}$.
- Si X pertenece al conjunto $\mathcal{A}$ entonces X cumple la propiedad.

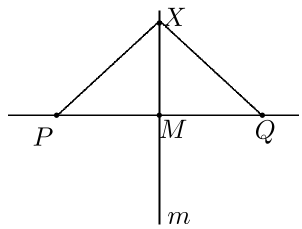
Por ejemplo, El lugar geométrico de los puntos que están entre dos puntos distintos A y B, es el segmento abierto $\overset{\circ\!-\!\circ}{AB}$.

Teorema. *El lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de dos puntos dados de ese plano es la mediatriz del segmento determinado por los dos puntos.*

Demostración. Hay que probar que si un punto del plano π equidista de P y Q entonces pertenece a la mediatriz m del segmento $\overline{PQ}$ en ese plano. Y que si un punto pertenece a la mediatriz m entonces equidista de P y Q. Recordamos que $m \perp \overleftrightarrow{PQ}$ y que m pasa por el punto medio M de $\overline{PQ}$.

- **Si X equidista de P y Q y $X \in \pi$:** •
  - si X está alineado con P y Q, será $X = M$, punto medio de $\overline{PQ}$, y X pertenecerá a la mediatriz de $\overline{PQ}$, es decir $X = M$.



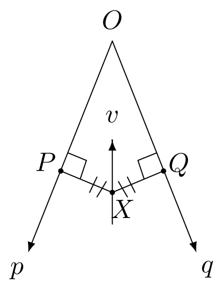


  - si X no está alineado con P y Q, pensamos en el triángulo $\overset{\triangle}{PXQ}$ que resulta isósceles, con $\overline{PX} \equiv \overline{QX}$; entonces, por el corolario sobre mediatriz y bisectriz de pág. 52, X pertenecerá a la mediatriz de $\overline{PQ}$ en π.
- **Si X pertenece a la mediatriz, en π, de $\overline{PQ}$:** •
  - si X está alineado con P y Q entonces X será el punto medio de $\overline{PQ}$ y pertenecerá a la mediatriz de $\overline{PQ}$.
  - si X no está alineado con P y Q entonces en la simetría axial σ de eje la mediatriz, el punto X es fijo y $\sigma(P) = Q$, con lo que $\sigma(\overline{XP}) = \overline{XQ}$ es decir $\overline{XP} \equiv \overline{XQ}$. ∎

Teorema. *El lugar geométrico de los puntos interiores a un ángulo no nulo ni llano, que equidistan de sus lados, es la bisectriz del ángulo (excluido el vértice del ángulo, que no es un punto interior).*

Demostración. Consideramos el $\widehat{pq}$ de vértice O.

- **Si X es interior al ángulo y equidista de los lados p y q:** •



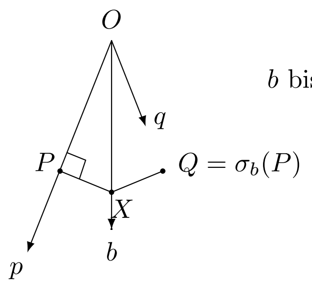
v bisectriz de $\widehat{PXQ}$

Llamemos P al pie de la perpendicular, desde X, a la recta que incluye a p; y llamemos Q al pie de la perpendicular, desde X, a la recta que incluye a q. Se cumple que P, X y Q no están alineados. (Si lo estuvieran, como p y q son coplanares y perpendiculares respectivamente a $\overleftrightarrow{XP}$ y $\overleftrightarrow{XQ}$, sería $p \parallel q$, en contradicción con que son lados de un ángulo no nulo ni llano).

Sea σ_v la simetría axial cuyo eje incluye a la bisectriz v de $\widehat{PXQ}$. σ_v es involutiva y

- $\sigma_v(P) = Q$, por transporte del $\overline{XP}$ que es congruente con $\overline{XQ}$.
- $\sigma_v(\overleftrightarrow{PO}) = \overleftrightarrow{QO}$, porque son las únicas perpendiculares por O, en el plano π, respectivamente a p y q.
- Como $\{O\} = \overleftrightarrow{PO} \cap \overleftrightarrow{QO}$, entonces
  $\sigma_v(\{O\}) = \sigma_v\left(\overleftrightarrow{PO} \cap \overleftrightarrow{QO}\right) = \overleftrightarrow{QO} \cap \overleftrightarrow{PO} = \{O\}$,
  es decir $\sigma_v(O) = O$. Por lo tanto, O es un punto fijo en σ_v y debe pertenecer al eje de simetría.
  Así que $\sigma_v(\widehat{POX}) \equiv \widehat{QOX}$.
  Se puede justificar que $P \in p$ y que $Q \in q$, por lo que $\widehat{POQ} = \widehat{pq}$. Como además X es interior al ángulo $\widehat{pq}$, $\overrightarrow{OX}$ será bisectriz de $\widehat{pq}$.

- Si $X \in b - \{O\}$, con b bisectriz de $\widehat{pq}$:



b bisectriz de $\widehat{pq}$

Consideramos la simetría axial σ_b cuyo eje incluye a b. Sea P el pie de la perpendicular desde X a la recta que incluye a p, y sea $Q = \sigma_b(P)$. Como X pertenece al eje resultará que $\overline{XP} \equiv \overline{XQ}$, y Q pie de la perpendicular desde X a la recta $\overleftrightarrow{OQ}$. Si probamos que Q pertenece a q habremos terminado la demostración.

Por transporte de ángulo, debe ocurrir que $\sigma(p) = q$. Y como $P \in p$ debe ocurrir $\sigma_b(P) \in \sigma_b(p)$, es decir $Q \in q$.

■

Se deja como ejercicio demostrar que:

Teorema. *El lugar geométrico de los puntos de un plano π que equidistan de dos rectas de π, secantes, es la unión de dos rectas tales que, esa unión coincide con la unión de las cuatro bisectrices de los ángulos determinados por las rectas.*

9. Congruencia de triángulos

Como ocurre con cualquier par de conjuntos de puntos, dos triángulos se dicen congruentes si son correspondientes en una t.r. Si una t.r. envía un triángulo a otro triángulo, es irremediable que cada vértice del primero de los triángulos se transforme en algún vértice del segundo.

Cuando digamos que los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ son congruentes usualmente estaremos queriendo decir no sólo que hay una μ en la que $\mu(\overset{\triangle}{ABC}) = A'\overset{\triangle}{B'}C'$ sino que exactamente $\mu(A) = A'$, $\mu(B) = B'$ y $\mu(C) = C'$ y en consecuencia será

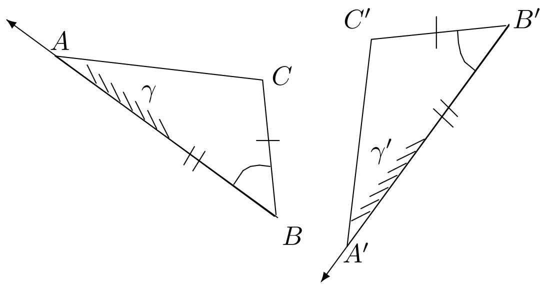
$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \quad \overline{CA} \equiv \overline{C'A'} \quad \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'} \quad \widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'} \quad \widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$$

Los llamados criterios de congruencia de triángulos se refieren a que es suficiente que se cumplan algunas (ya veremos cuáles) de las seis congruencias anteriores para que además se cumplan las otras; y para que, en definitiva, los triángulos resulten congruentes.

Para justificar esos criterios, mostraremos que hay alguna t.r. que transforma uno de los triángulos en el otro. Y para ello alcanza con mostrar que la t.r. transforma los vértices de uno de los triángulos en los vértices del otro.

Tenemos los criterios siguientes:

Criterio L-A-L *Si dos triángulos tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo comprendido, entonces son congruentes.*

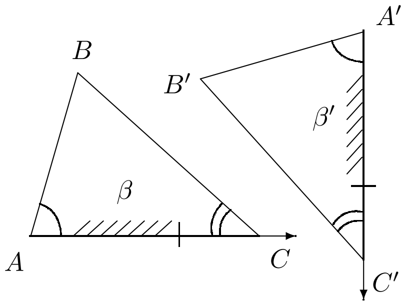


Proponemos σ tal que:

$$\begin{cases} \sigma\left(\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{B'A'} \\ \sigma(\gamma) = \gamma' \end{cases}$$

Dados los triángulos $A\overset{\triangle}{B}C$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$, sean γ, γ' y σ los semiplanos y la t.r. sugeridos por la ilustración. Se cumplirá: $\sigma(B) = B'$; Por transporte del segmento $\overline{BA}$ sobre la semirrecta $\overrightarrow{B'A'}$, deberá cumplirse $\sigma(A) = A'$. Por transporte del ángulo $\widehat{ABC}$ a partir de la semirrecta $\overrightarrow{B'A'}$ sobre γ', $\sigma(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{B'C'}$. Por transporte del segmento $\overline{BC}$ sobre la semirrecta $\overrightarrow{B'C'}$, $\sigma(C) = C'$.

Criterio A-L-A *Si dos triángulos tienen respectivamente congruentes un lado y los ángulos con vértices en los extremos del lado, entonces son congruentes.*



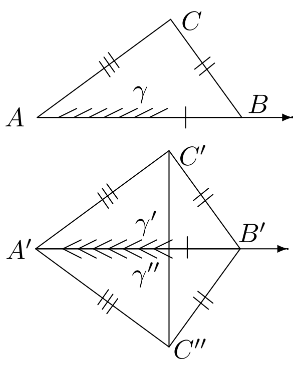
Proponemos τ tal que:

$$\begin{cases} \tau\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'} \\ \tau(\beta) = \beta' \end{cases}$$

Sean β, β' y τ los semiplanos y la t.r. sugeridos por la ilustración. En la t.r. que se indica se consigue $\tau(A) = A'$. Por transporte del segmento $\overline{AC}$ sobre $\overrightarrow{A'C'}$, $\tau(C) = C'$. Por transporte de ángulo, $\widehat{ACB}$ a partir de $\overrightarrow{CA}$ y en el semiplano β, $\tau(\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{C'B'}$. Por transporte de ángulo $\widehat{CAB}$ a partir de $\overrightarrow{AC}$ y en el semiplano β, $\tau(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$. Por intersección de semirrectas homólogas, como $B \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CB}$, debe ocurrir $\tau(B) \in C'\overrightarrow{A'C'} \cap \overrightarrow{B'C'}$. Es decir $\tau(B) = B'$

Criterio L-L-L *Si dos triángulos tienen los tres lados respectivamente congruentes, entonces son congruentes.*

Aquí no nos conviene plantear una t.r. que nos lleve directamente un triángulo sobre el otro. Es más sencilla la demostración si utilizamos, primero, una t.r. que hace aparecer un triángulo simétrico del $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ respecto de uno de los lados. Lo que ya sabemos sobre mediatrices de segmentos, nos permite completar la demostración.



γ''opuesto de γ

μ es tal que:

$$\begin{cases} \mu(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'} \\ \mu(\gamma) = \gamma'' \end{cases}$$

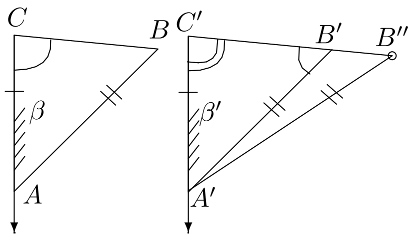
$C'' = \mu(C)$

$\mu(A\overset{\triangle}{B}C) = A'\overset{\triangle}{B'}C''$

σ: simetría axial de eje $\overleftrightarrow{A'B'}$

Sean γ y γ', μ, σ y C'' los semiplanos, las t.r. y el punto sugeridos por la ilustración. Sin duda $A'\overset{\triangle}{C'}C''$ y $B'\overset{\triangle}{C'}C''$ son triángulos isósceles que comparten la base $\overline{C'C''}$, por lo que la mediatriz de esa base pasa por los vértices opuestos A' y B'. Entonces $\sigma(C'') = C'$ por lo que $\sigma \circ \mu(A\overset{\triangle}{B}C) = A'\overset{\triangle}{B'}C'$.

Criterio L-L-A *Si dos triángulos tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo opuesto al mayor de esos lados, (o a cualquiera de ellos si ambos lados de cada triángulo son congruentes), entonces los triángulos son congruentes.*



$$\begin{cases} \mu \text{ tal que:} \\ \mu\left(\overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{C'A'} \\ \mu(\beta) = \beta' \end{cases}$$

$\mu(B) = B''$

No es posible el B'' ilustrado;

se demuestra que sólo es posible: $B'' = B'$

Sean los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $A'\overset{\triangle}{B'}C'$, con

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \quad \overline{AB} \geq \overline{AC}, \quad \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$$

Por propiedades de la relación de menor respecto de la congruencia, $\overline{A'B'} \geq \overline{A'C'}$
y por el teorema de que a mayor lado se opone mayor ángulo,

$$\widehat{A'C'B'} \geq \widehat{A'B'C'} \tag{1}$$

Sean β, β' semiplanos y μ una t.r. sugeridos por la ilustración. Podemos justificar fácilmente que $\mu(C) = C'$, $\mu(A) = A'$ y que $\mu(B) \in \overrightarrow{C'B'}$. Sea $B'' = \mu(B)$. Se cumplirá

$$\overline{AB''} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{AB'}.$$

Tenemos en principio tres posibilidades para B'': B' entre C y B''; B'' entre C; y B' y $B'' = B'$. Descartaremos las dos primeras.

Caso B' entre C' y B''. A', B', B'' determinarían un triángulo isósceles con ángulos en B' y B'' congruentes. Se cumpliría

$$\widehat{A'B'C'} > \widehat{A'B''B'} \equiv \widehat{A'B'B''} > \widehat{A'C'B'}$$

La primera relación por aplicación del primer teorema del ángulo exterior al triángulo $A'\overset{\triangle}{B'}B''$, con ángulo exterior en B' y ángulo interior en B''; la segunda porque $A\overset{\triangle}{B'}B''$ es isósceles; la tercera por aplicación del primer teorema del ángulo exterior al triángulo $A'\overset{\triangle}{B'}C'$, con ángulo exterior en B' y ángulo interior en C'. Se concluiría que

$$\widehat{A'B'C'} > \widehat{A'C'B'} \tag{2}$$

La expresión (2) contradice a la (1). Como la (2) es consecuencia de haber supuesto B' entre C' y B'', concluimos que ese caso no es posible.

Caso B'' entre C' y B'. Se descarta por un razonamiento similar, ya que se cumpliría

$$\widehat{A'C'B'} < \widehat{A'B''B'} \equiv \widehat{A'B'B''} = \widehat{A'B'C'}$$

Caso $B' = \mu(B)$. Es el único que nos ha quedado como posible.

También puede demostrarse un quinto caso de congruencia de triángulos que podríamos identificar como criterio A-A-L. No es costumbre hacerlo porque, para las aplicaciones más frecuentes, tendremos disponible el axioma de la paralela con el que justificaremos que los tres ángulos de cualquier triángulo suman un llano; y en ese caso, en lugar de utilizar este criterio A-A-L de congruencia, podremos utilizar el A-L-A.

Capítulo VI

Perpendicularidad en el espacio

1. Perpendicularidad entre rectas y planos

Llamado a la intuición

Las rectas verticales y los planos horizontales están sugeridos por muchas situaciones de la vida real. Por ejemplo, entre las cosas naturales, muchos árboles tienen su tronco en posición casi vertical, y la superficie del agua de los charcos puede considerarse parte de un plano horizontal; y entre las cosas construidas por las personas, hay muchos más ejemplos, fundamentalmente en los edificios. En general, esperamos que las habitaciones de un edificio tengan los pisos prácticamente horizontales y que las paredes se encuentren sobre planos verticales. Más globalmente, esperamos poder asociar a cada edificio con muchas rectas verticales; y si eso no es posible, recordamos al edificio como algo muy especial; por ejemplo la Torre de Pisa (inclinada).

Un plano horizontal y una recta vertical constituyen un ejemplo de plano y recta perpendiculares.

Si imaginamos un plano y un punto, sabemos que hay infinitas rectas que contienen al punto pero que no están incluidas en el plano; rectas que se "inclinan" sobre el plano de distinto modo. Intuimos que entre todas ellas hay exactamente una que se distingue, de algún modo, de las demás.

Por ejemplo, si el plano es horizontal, como el sugerido por el piso de un aula, la recta que se distingue de las demás es <u>la</u> recta vertical: la que los albañiles materializan utilizando la plomada; si el plano es un plano vertical como el sugerido por cualquiera de las paredes del aula, la recta que se distingue es <u>una</u> de las rectas horizontales. Hemos subrayado "<u>la</u> recta vertical" y "<u>una</u> de las rectas horizontales" porque por un punto pasa una única recta vertical pero pasan infinitas rectas horizontales, y sólo una de ellas es perpendicular a la pared elegida.

Aun cuando un plano sea inclinado, por cada punto pasa exactamente una recta perpendicular a ese plano.

Esto, y otros aspectos consecuencias de ello, pueden ser analizados y justificados con los axiomas introducidos hasta ahora. Lo haremos en el presente capítulo.

Nota. Observemos que si quisiéramos ser muy precisos con el lenguaje, pondríamos más cuidado para hablar de planos horizontales: A causa de la redondez de la tierra, si "construyéramos" una porción grande de un plano, tan grande que pudiera ser observado simultáneamente desde las ciudades de Salta y Tucumán, podría resultar que el plano fuera horizontal para algún salteño, y no horizontal para los tucumanos.

A continuación, veremos que es posible definir perpendicularidad entre una recta y un plano en base a perpendicularidad de rectas; que apoyándonos en planos perpendiculares a rectas, podremos definir rectas ortogonales; y justificaremos existencia y unicidad del plano perpendicular a una recta por un punto, y de la recta perpendicular a un plano por un punto.

Encontraremos que la perpendicularidad entre rectas y planos es preservada en todas las transformaciones rígidas; y que tiene sentido comparar ángulos diedros teniendo en cuenta sus secciones rectas; todo ello nos permitirá sacar conclusiones acerca de cómo actúan las t.r. en las que cierto plano π es estable, sobre puntos no pertenecientes a π.

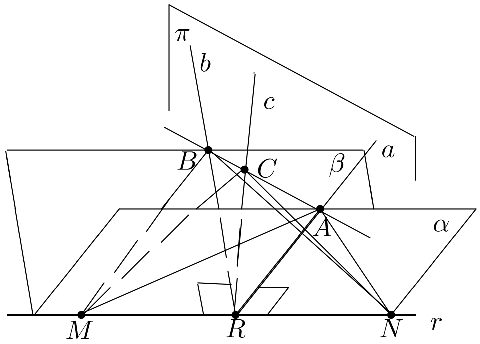
Haz de rectas perpendiculares a una recta

Teorema. (Plano de perpendiculares a recta) *Si a y b son rectas distintas y perpendiculares a una recta r por un punto de ella, R, entonces el haz de rectas del plano π determinado por a y b incluye a todas las rectas perpendiculares a r que pasan por R y nada más que a ellas.*

Demostración. Mostraremos que cualquier recta de π que pase por R, es perpendicular a r y que si una recta es perpendicular a r y pasa por R, entonces esa recta está incluida en π.

En primer lugar seguramente a, b y r no son coplanares pues en el plano que incluye a r y a a sólo hay una perpendicular a r por R, que no es otra que a.
Sean M y N dos puntos de r simétricos respecto de R. Sea α el plano que incluye a r y a; β el que incluye a r y b; y π el que incluye a a y b.
Sea c una recta.

• **Si** $c \subset \pi$ **y** $R \in c$ **entonces** $c \perp r$ **:** •



Si $c = a$, o $c = b$ es inmediato.

Si c, a y b son tres rectas distintas, por ser coplanares en π, existe con seguridad alguna recta de π, que no pasa por R y que corta a las tres rectas (se deja como ejercicio). Así que podremos tener A, B y C tres puntos alineados, con $A \in a$, $B \in b$ y $C \in c$.

$a = \overleftrightarrow{AR}$ es la mediatriz de $\overline{MN}$ en α, y $b = \overleftrightarrow{BR}$ es la mediatriz de $\overline{MN}$ en β. Por lo tanto

$$\overline{AM} \equiv \overline{AN}, \quad \overline{BM} \equiv \overline{BN};$$

Entonces, por el caso L-L-L de congruencia de triángulos,

$$A\overset{\triangle}{M}B \equiv A\overset{\triangle}{N}M, \quad \text{en particular,} \quad \widehat{MAB} \equiv \widehat{NAB}, \quad \widehat{MBA} \equiv \widehat{NBA}.$$

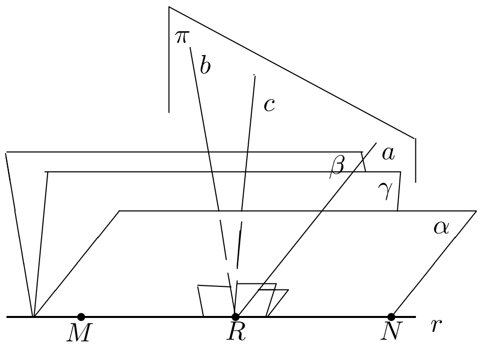
Sabemos que en esas condiciones existe una t.r. ρ en la que

$$\rho(A) = A; \qquad \rho(M) = N; \qquad \rho(B) = B$$

(Más adelante llamaremos a esta t.r. rotación de eje $\overleftrightarrow{AB}$). Como A y B son fijos en ρ, todos los puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ son fijos en ρ. Por lo tanto, $\rho(C) = C$, $\rho(\overline{CM}) = \overline{CN}$ y en definitiva $\overline{CM} \equiv \overline{CN}$.

Entonces, en el plano que contiene a M, N y C, la recta $c = \overleftrightarrow{CR}$ es mediatriz de $\overline{MN}$, es decir c es perpendicular a $\overleftrightarrow{MN} = r$.

• **Si** $c \perp r$ **y** $R \in c$ **entonces** $c \subset \pi$**:** •



Sea γ el plano determinado por r y c. Los planos γ y π tienen en común al punto R. No puede ocurrir que R sea el único punto en común de esos planos, así que existirá un recta $c' \subset \gamma \cap \pi$.

Por el inciso anterior $c' \perp r$.

Ahora bien, c y c' son rectas del plano γ que pasan por R y son perpendiculares a r. Entonces $c = c'$, y por lo tanto $c \subset \pi$.

∎

El teorema anterior hace que tengan sentido las siguientes definiciones:

Definiciones. Un plano π y una recta r con un punto R en común se dicen **perpendiculares**, si la recta es perpendicular a cualquier recta (es decir, a todas las rectas) del plano que pasa por R. También se dice que la recta r es **perpendicular a** π y que π **es perpendicular a** r. Si Q y es un punto de r, el punto R se dice **pie de la perpendicular** desde Q al plano π.

Como consecuencia inmediata del teorema y de las definiciones anteriores:

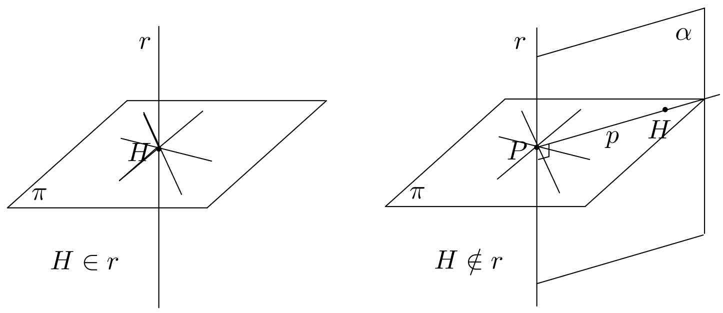
Proposición. (Criterio de perpendicularidad entre recta y plano) *Un plano π y una recta r, secantes en R, son perpendiculares si y sólo si la recta r es perpendicular a dos rectas distintas de π que pasan por R.*

Plano perpendicular a una recta por un punto

Teorema. (Plano perpendicular a recta) *Dados una recta r y un punto H existe un único plano perpendicular a r que pasa por H.*

Demostración.

- Si $H \in r$, todas las perpendiculares a r por H (y en cada plano que incluye a r tenemos una) están incluidas en un plano que cumple la definición para ser perpendicular a la recta (teorema anterior). Y es el único plano que lo cumple, entre los que pasan por H.
- Si $H \notin r$, podemos pensar en el plano α determinado por r y H; en ese plano, consideramos la recta p perpendicular a r desde H (hay exactamente una recta en esas condiciones por el teorema de pág. 46). Sea P pie de esa perpendicular. Si existe algún plano en las condiciones pedidas debe contener a P. Por el inciso anterior aplicado a P existe un único plano perpendicular a r que pasa por P. Y ese plano será el único perpendicular a r que pasa por H.



■

Corolario. *Si π y π' son planos perpendiculares a una recta r entonces $\pi \parallel \pi'$.*

Recordamos que los planos cualesquiera, π y π', pueden ser o no ser paralelos; y que podemos decidir al respecto analizando $\pi \cap \pi'$:

$$\pi \cap \pi' = \begin{cases} \pi, & (\pi = \pi', \quad \pi \parallel \pi') \\ \emptyset, & (\pi \parallel \pi') \\ \underline{\text{una recta}}\,, & (\pi \nparallel \pi') \end{cases}$$

Demostración.

- Si $\pi \cap \pi' = \emptyset$, entonces $\pi \parallel \pi'$.
- Si $\pi \cap \pi' \neq \emptyset$, existirá un punto $H \in \pi \cap \pi'$; tanto π como π', por la unicidad recién demostrada, deberán coincidir con el único plano perpendicular a r por H. ■

Nota. Sin contar aun con el axioma de la paralela, que veremos recién en pág. 72, no podemos justificar que si $\pi \parallel \pi'$ y $r \perp \pi$ entonces $r \perp \pi'$.

Se deja como ejercicio demostrar:

Proposición. *El lugar geométrico de los puntos de Ω que equidistan de dos puntos distintos dados, M y N, es un plano π perpendicular a $\overleftrightarrow{MN}$ que pasa por el punto medio del segmento $\overline{MN}$.*

Ese plano se llama **plano mediatriz de** $\overline{MN}$, o **plano de las mediatrices de** $\overline{MN}$.

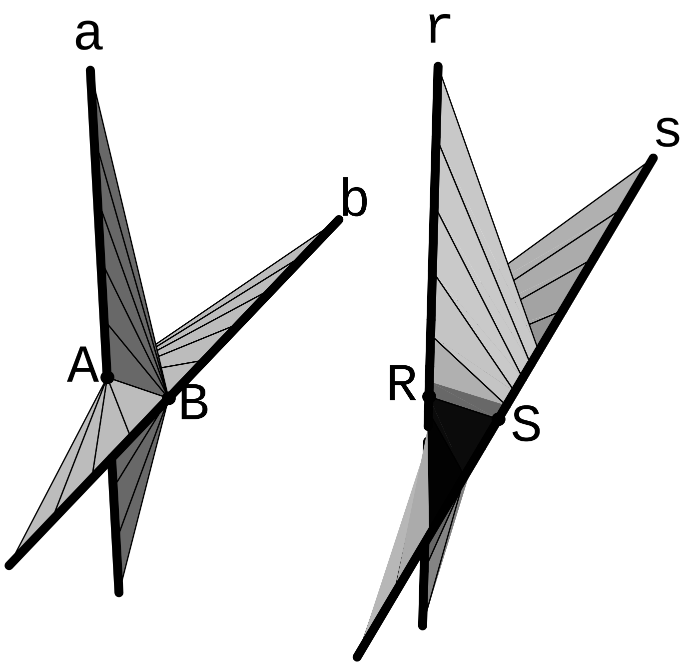
2. Rectas ortogonales

Llamado a la intuición

Dadas dos rectas alabeadas p y q podemos pensar en las rectas que pasan por algún punto de p y que son perpendiculares a q. Todos esas rectas "formarán" cierta superficie. También se puede pensar en las rectas que pasan por algún punto de q y son perpendiculares a p, que "formaran" otra superficie. Desde el punto de vista lógico, cabrían tres posibilidades para esas superficies:

Ambas son planos   Ninguna es un plano   Sólo una es un plano

La figura siguiente sugiere los dos primeros casos. Veremos después que el tercer caso es imposible.



a y b son ortogonales.

r y s no son ortogonales.

Las superficies correspondientes a las rectas a y b de la figura son ambas planas. Las correspondientes a las rectas r y s no lo son. En ambos casos, los pares de superficies correspondientes tiene una recta en común que es perpendicular a las rectas dadas: hay un segmento $\overline{AB}$ que es perpendicular en A a a y perpendicular en B a b; y hay un segmento $\overline{RS}$ que es perpendicular en R a r y en S a s.

Todo esto nos anima a definir ortogonalidad de rectas: a las rectas a y b las llamaremos ortogonales, en base a que hay un plano que incluye a una y es perpendicular a la otra mientras que r y s no serán ortogonales.

Definiciones y propiedades de rectas ortogonales

Definición. Dos rectas se dicen **ortogonales** si existe un plano que incluye a una y es perpendicular a la otra.

Para decidir si dos rectas dadas son ortogonales, de acuerdo a la definición anterior, deberíamos averiguar si existe un plano que incluya a la primera y sea perpendicular a la segunda; y en caso de no encontrarlo, deberíamos averiguar si existe un plano que incluya a la segunda y que sea perpendicular a la primera. Sin embargo, el teorema siguiente nos permite "reducir" ese trabajo de averiguación.

Teorema. *Si r y s son rectas tales que existe un plano π que incluye a s y que es perpendicular a r, entonces también existe un plano π' que incluye a r y que es perpendicular a s.*

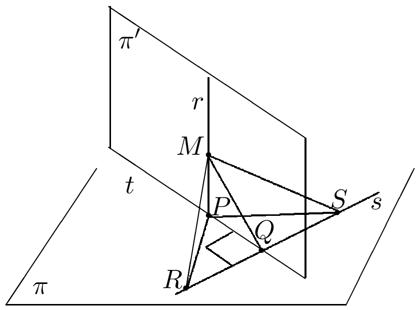
Demostración. Supongamos $s \subset \pi$ y $r \perp \pi$, con $P \in r \cap \pi$. Sea t la recta del plano π, perpendicular a s por P. El plano π', determinado por r y t, ciertamente incluye a r. Veamos que, además, es perpendicular a s.

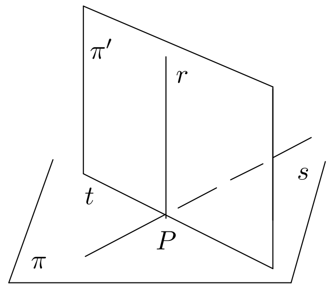
- **Si r y s no son secantes: (r y s serán alabeadas; $P \notin s$)** • Sea Q pie de la perpendicular desde P a s; $\{Q\} = t \cap s$.

  Sean $M \in r - \{P\}$ y $R, S \in s$, con Q punto medio de $\overline{RS}$.

  Se cumple que el triángulo $\overset{\triangle}{RPS}$ es isósceles; $\overset{\triangle}{RPM} \equiv \overset{\triangle}{SPM}$; $\overset{\triangle}{RMS}$ es isósceles y $\overleftrightarrow{MQ} \perp s$.

Así que π' es el plano mediatriz del segmento $\overline{RS}$, es decir, $s \perp \pi'$.





- **Si r y s son secantes en P ($P \in s$):** • Como $r \perp \pi$, debe ser $r \perp s$, pues $s \subset \pi$ y $P \in s$. Y como $s \perp r$ y $s \perp t$, tendremos $s \perp \pi'$, ya que π' está determinado por r y t.

  ▪

Es inmediato que

Corolario. (Criterio de ortogonalidad de rectas) *Dos rectas son ortogonales si y sólo si las perpendiculares a una de ellas desde dos puntos distintos de la otra tienen el mismo pie.*

Corolario. *Dados una recta r y un punto Q existen infinitas rectas que pasan por Q y son ortogonales a r: son todas las rectas que, pasando por Q están incluidas en el plano perpendicular a r por Q.*

Observamos que, de acuerdo a la definición de ortogonalidad, las rectas perpendiculares son también rectas ortogonales. En otros contextos, es frecuente utilizar las expresiones "perpendiculares" y "ortogonales" como sinónimos. Pero en este curso reservaremos la expresión "rectas perpendiculares" para referirnos a rectas ortogonales que además son concurrentes. Es decir, dos rectas perpendiculares cualesquiera serán ortogonales, pero no siempre dos rectas ortogonales serán perpendiculares.

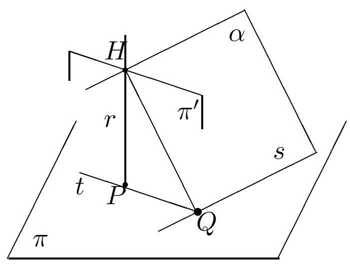
Recta perpendicular a un plano por un punto dado

Teorema. (Recta perpendicular a plano) *Dados un plano π y un punto H, existe una única recta perpendicular a π y que pasa por H.*

Existencia

Demostración. Para demostrar la existencia analizamos dos casos según que H pertenezca o no a π.

- **$H \notin \pi$:** •



  Elegimos $s \subset \pi$.

  En el plano α determinado por s y H, sea Q el pie de la perpendicular a s desde H.

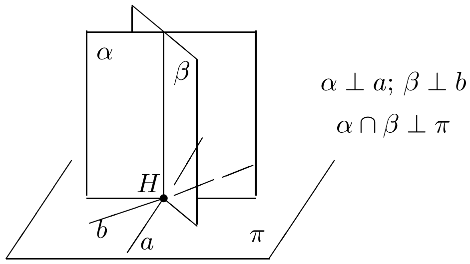
  En el plano π, sea t la perpendicular a s que pasa por Q.

  En el plano π' determinado por t y H, sea P el pie de la perpendicular por H a t.

  Afirmamos que la recta $r = \overleftrightarrow{HP}$, cumple $r \perp \pi$.

  Eso es así porque la recta r está incluida en π' que es perpendicular a s (gracias a las dos rectas $\overleftrightarrow{QH}$ y t), es decir que r y s son ortogonales; así que por el teorema anterior, también la recta s está incluida en un plano perpendicular a r; y ese plano incluye a todas las perpendiculares desde puntos de s a r, en particular incluye a t; por lo tanto, ese plano es π.

- **$H \in \pi$:** •



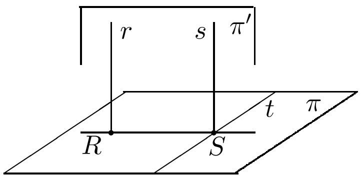
Elegimos dos rectas a y b de π por H y consideramos el plano α perpendicular a a por H, y el plano β, perpendicular a b por H. La recta buscada es la intersección de los planos α y β. ∎

Unicidad

Demostración. Si hubiera dos rectas r y r', por H, y ambas perpendiculares a π, el plano π' determinado por r y r' sería secante con π según cierta recta, llamémosla a. En el plano π' tendríamos dos rectas perpendiculares a a, la r y la r', en contradicción con la unicidad ya justificada en pág. 46. ∎

Corolario. *Si dos rectas son perpendiculares a un mismo plano, entonces son paralelas.*

Demostración. Sean r y s ambas perpendiculares a π, $\{R\} = r \cap \pi$ y $\{S\} = s \cap \pi$. Sólo debemos preocuparnos del caso $r \neq s$.
Ya sabemos, por la unicidad de la recta perpendicular a un plano por un punto, (teorema de pág. 65) $r \cap s = \emptyset$, así que sólo necesitamos probar que r y s son coplanares.
Sea t una recta de π, perpendicular a $\overleftrightarrow{RS}$: hay una única recta en esas condiciones (ver pág. 46).



Resulta que r y t son ortogonales ya que π incluye a t y es perpendicular a r. Pero entonces debe existir un plano π', que incluya a r y sea perpendicular a t. π' incluirá a todas las perpendiculares a t desde puntos de r; en especial a la recta $\overleftrightarrow{RS}$. Y por ser π' perpendicular a t por el punto S, π' incluirá a la recta s perpendicular a t por S. En consecuencia r y s son coplanares en π'. ∎

Nota. Aun no es posible probar un recíproco del corolario anterior: *si las rectas r y s y un plano π cumplen que $r \parallel s$ y $r \perp \pi$ entonces $s \perp \pi$.* Para poder demostrarlo necesitamos el axioma de la paralela que veremos recién en pág. 72.

3. Propiedades de las t.r. en relación a rectas y planos perpendiculares

Ya sabíamos que si dos rectas coplanares son perpendiculares, sus imágenes en cualquier t.r. son perpendiculares. Ahora, como la perpendicularidad entre una recta r y un plano π implica perpendicularidad entre la recta r y todas las rectas de π que pasan por el punto de corte de r y π, y como además la ortogonalidad entre rectas se define en base a rectas y planos perpendiculares, podemos asegurar que:

La perpendicularidad entre rectas y planos y la ortogonalidad entre rectas es preservada por todas las t.r.

En particular, *sea μ es una t.r., P un punto, r una recta y π un plano,*

$$\text{Si} \quad P \in r \perp \pi \qquad \text{entonces} \qquad \mu(P) \in \mu(r) \perp \mu(\pi)$$

Esta propiedad, junto con el transporte de segmentos y ángulos, permite construir la imagen de cualquier punto por cualquier t.r. μ, definida mediante las imágenes de un adecuado par semirrecta a, semiplano β y sus imágenes. Si llamamos π al plano que incluye a β, como las t.r. preservan la orientación quedarán determinadas las imágenes de cualquiera de los semiespacios de borde π. Para encontrar las imágenes de puntos de π será suficiente aplicar transporte de ángulos y/o de segmentos. Para un punto P fuera de π, podremos apoyarnos en el punto H pie de la perpendicular desde P a π, y luego de encontrado $\mu(H)$ ubicar a $\mu(P)$, por transporte de segmento, buscándolo en la semirrecta que corresponda de la perpendicular a $\mu(\pi)$ que pasa por $\mu(Q)$.

Además se cumple: *Si π es estable en μ y O es un punto de π fijo en μ, entonces la recta perpendicular a π que pasa por O es una recta estable en μ.*

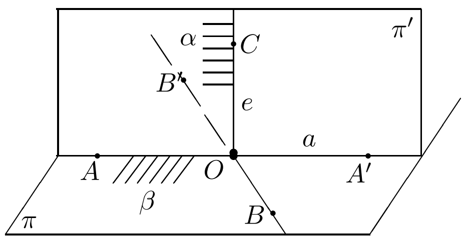
Si μ es una t.r directa en π entonces cada uno de los semiespacios de borde π es estable; y si μ es inversa en π entonces cada uno de los semiespacios de borde π se transforma en su opuesto. En consecuencia,

Si μ es una t.r. directa en π y O es un punto de π fijo en μ entonces la recta p perpendicular a π que pasa por O tiene todos sus puntos fijos en μ. En las mismas condiciones pero con μ inversa en π, sólo hay un punto de p fijo en μ: para cualquier punto $P \in p$, con $P \neq O$, si $\mu(P) = P'$ se cumplirá que O es el punto medio de $\overline{PP'}$.

4. Simetría central en un plano y axial en otro: simetría axial para todo el espacio

Hemos estudiado con bastante detalle dos tipos de t.r. en las que cierto plano π es estable; las hemos estudiado en cuanto a la acción de esas t.r. sobre puntos de π. Estudiaremos ahora la acción de esas t.r. en puntos del espacio fuera de π. Y descubriremos que, en realidad, ambos tipos de t.r. son esencialmente "iguales".

La transformación que hemos llamado simetría central, en un plano π, de centro O está caracterizada por transformar una semirrecta de origen O, incluida en π, en su opuesta y uno de los semiplanos de π de borde la semirrecta en su opuesto. Y la simetría axial, en un plano π', por transformar a una semirrecta en la misma y a uno de los semiplanos de π' de borde esa semirrecta, en su opuesto. Analicemos lo que ocurre en un plano π' perpendicular a π y que pase por O.



π y π' son planos, con $\pi' \perp \pi$; $O \in a = \pi \cap \pi'$; la recta e es perpendicular a π y pasa por O.

$A, A' \in a - \{O\}$. O es punto medio de $\overline{AA'}$.

$B, B' \in \pi - a$. O es punto medio de $\overline{BB'}$.

$C \in e - \{O\}$.

α, α', β, β' son semiplanos: α de borde e que contiene a A; α', opuesto de α (contiene a A'); β de borde a que contiene a B; β' opuesto de β (contiene a B').

Sean σ_O y σ_e las t.r. en las que:

$$\begin{cases} \sigma_O(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA'} \\ \sigma_O(\beta) = \beta' \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_e(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} \\ \sigma_e(\alpha) = \alpha'. \end{cases}$$

Se cumple que $\sigma_O(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} = \sigma_e(\overrightarrow{OC})$, ya que la $\overleftrightarrow{OC}$ es la única perpendicular a π por O; y $\sigma_O(\alpha) = \alpha' = \sigma_r(\alpha)$. Es decir, $\sigma_O = \sigma_e$.

Por lo tanto π y π' son ambos estables en σ_O (que es la misma que σ_e). σ_O es directa en π e inversa en π'.

Así que la t.r σ_O, de todo el espacio, que llamamos "simetría central, en el plano π, de centro O", en el plano π', la hemos llamado "simetría axial de eje e".

Cualquier plano que incluya a la recta e será perpendicular a π y resultará estable en σ_O; más aun, a cada semiplano de borde e le corresponderá el semiplano opuesto. Es decir, en cualquier plano que incluya a e la t.r. se presenta como una simetría axial de eje e..

Además, en cualquier otro plano perpendicular a e, la σ_O será una simetría central con centro el punto común a e y ese plano.

Insistimos: la t.r. de todo el espacio, que en relación a los puntos de un plano π "merece" llamarse simetría central, en ese plano, de centro O, también merece llamarse simetría central referida a otros planos paralelos a π aunque con otros centros: los planos que son perpendiculares a la recta e que a su vez es perpendicular a π por O. Pero "no merece" llamarse simetría central de centro O, sin mencionar a algún plano, por cuanto por ejemplo O no es punto medio del segmento determinado por C y su imagen para el caso en que $C \in e$: la imagen de tal C es el mismo C y no puede decirse que O sea el punto medio del segmento nulo $\overline{CC}$.

Si nos interesa trabajar con esta t.r. calculando imágenes de puntos de todo el espacio, es preferible usar nombres que no generen confusiones: En lugar de hablar de simetría central, en el plano π, de centro

O, podremos hablar de simetría axial de eje la perpendicular a π por O. (No hace falta mencionar al plano que incluye a e porque cualquiera de ellos juega el mismo papel).

Así podremos reservar el nombre de simetría central de centro O —si es que nos interesa todo el espacio—, para una transformación biyectiva en la que O es el punto medio de cualquier par de correspondientes. Veremos, en la pág. 111, que esta nueva simetría central es una t.b. pero no es una t.r.

5. Secciones de un diedro. Sección recta de un diedro

Si α y β son dos semiplanos con el mismo borde, no coplanares, denotamos con $\widehat{\alpha\beta}$ al diedro $\alpha \cup \beta$. La intersección de un diedro con un plano que corta a su arista en un punto, nos da un ángulo. Cuando el plano es perpendicular a la arista del diedro obtenemos un ángulo que se llama **sección normal del diedro** o **sección recta del diedro**.

Proposición. *Dado un ángulo no nulo ni llano $\widehat{ab}$ existe un único ángulo diedro tal que admite a $\widehat{ab}$ como una de sus secciones rectas.*

Demostración. En primer lugar existirá un único plano π que incluya a $\widehat{ab}$. Sea R el vértice del ángulo y sea r la única perpendicular a π por R. Sea α el semiplano de borde r que incluye a a, y β el semiplano de borde r que incluye a b.
Entonces $\widehat{\alpha\beta}$ es el único diedro que admite a $\widehat{ab}$ como una de sus secciones rectas. ∎

Congruencia de ángulos diedros

Al igual que para otros conjuntos de puntos, se dice que dos diedros son congruentes si hay alguna t.r. en la que sean correspondientes.

Un ejemplo sencillo de diedros congruentes: los **diedros opuestos por la arista**: Se llaman así los diedros tales que las caras de uno de ellos son semiplanos opuestos de las caras del otro. En esas condiciones es inmediato que comparten la misma arista.

Para justificar que diedros opuestos por la arista son congruentes alcanza con utilizar una simetría axial respecto de la arista (que es la misma t.r. que una simetría central, en un plano perpendicular a la arista, de centro el punto de corte del plano con la arista).

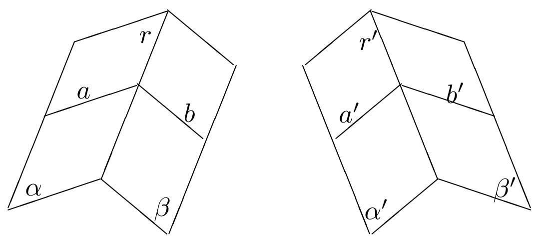
Teorema. (Congruencia de diedros) *Dos diedros son congruentes si y sólo si admiten secciones rectas congruentes.*

Demostración. Sean $\widehat{\alpha\beta}$ y $\widehat{\alpha'\beta'}$ ángulos diedros de aristas r y r' respectivamente

- **Si tienen secciones rectas congruentes . . .** • Sean π y π' planos respectivamente perpendiculares a r y r'. Supongamos que

$$\widehat{\alpha\beta} \cap \pi = \widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'} = \widehat{\alpha'\beta'} \cap \pi'$$

Existirá una t.r. μ en la que $\mu\left(\widehat{ab}\right) = \widehat{a'b'}$. Pero entonces, como la perpendicularidad se preserva en las t.r., necesariamente será $\mu(r) = r'$, y ya sea que $\mu(a) = a'$ y $\mu(b) = b'$ o que sea $\mu(a) = b'$ y $\mu(b) = a'$, en los dos casos tendremos que $\mu\left(\widehat{\alpha\beta}\right) = \widehat{\alpha'\beta'}$.



- **Si los diedros son congruentes . . .** • Si ahora μ es una t.r. que transforma un diedro en el otro, y π es un plano perpendicular a la arista del diedro $\widehat{\alpha\beta}$, entonces $\pi' = \mu(\pi)$ será un plano perpendicular a r', por lo que las siguientes secciones rectas resultarán congruentes:

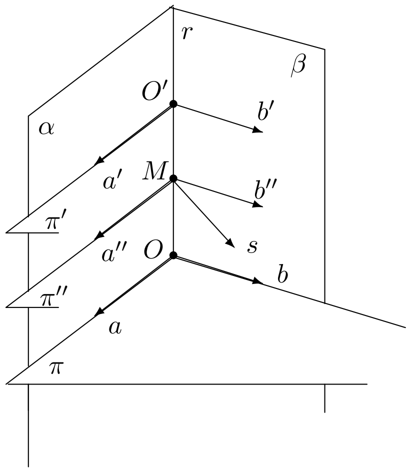
$$\widehat{ab} = \widehat{\alpha\beta} \cap \pi \qquad \widehat{a'b'} = \widehat{\alpha'\beta'} \cap \pi'$$

∎

Podemos preguntarnos si las distintas secciones rectas de un mismo diedro son o no son congruentes. La respuesta es que sí lo son.

Proposición. *Dos secciones rectas cualesquiera de un mismo diedro son congruentes.*

Demostración. Sean $\widehat{ab}$, de vértice O, incluida en el plano π, y $\widehat{a'b'}$ de vértice O', incluida en π', dos secciones rectas distintas de un diedro $\widehat{\alpha\beta}$ de arista r. Buscamos una t.r. que envíe una sección recta a la otra.
Para ello utilizamos una sección recta adicional $\widehat{a''b''}$ con vértice en el punto medio de $\overline{OO'}$, M, incluida en el plano π'', y consideramos la semirrecta s bisectriz de $\widehat{a''b''}$. Llamemos ϵ al semiespacio de borde π'' y que contiene a O; y ϵ' al semiespacio opuesto.



Sea σ_s la simetría axial respecto de la recta que incluye a la bisectriz s. π'' es perpendicular a r; $s \subset \pi''$ y s es secante con r. Entonces la recta que incluye a s es perpendicular a r, por lo que r es estable en esa simetría axial. Se cumple:

$$\sigma_s(a'') = b'' \quad \sigma_s(b'') = a'', \quad \sigma(\epsilon) = \epsilon', \quad \sigma_s(r) = r, \text{ con semirrectas de } r \text{ de origen } M \text{ intercambiadas.}$$

Entonces $\sigma_s(\alpha) = \beta$, y $\sigma_s(\beta) = \alpha$, ya que α está determinado por r y a'' y β está determinado por r y b''.
Por lo tanto

$$\begin{gathered} \sigma(a) = \sigma(\alpha \cap \epsilon) = \beta \cap \epsilon' = b' \\ \sigma(b) = \sigma(\beta \cap \epsilon) = \alpha \cap \epsilon' = a' \\ \widehat{ab} \equiv \widehat{b'a'} = \widehat{a'b'} \ . \end{gathered}$$

■

En relación a los sectores diedrales y las t.r. tenemos una propiedad similar a la de los sectores angulares:

Proposición. *Ningún sector diedral es congruente con otro sector diedral de igual arista incluido propiamente en el primero.*

Demostración. Si un diedro $\widehat{\alpha\beta}$ es congruente con otro $\widehat{\gamma\delta}$ de igual arista, sus secciones rectas por un plano π perpendicular a la arista serán congruentes y tendremos dos ángulos de igual vértice congruentes con el sector angular de uno incluido en el sector angular del otro. Entonces por el axioma de rigidez esos sectores angulares deben coincidir, con lo que los ángulos que son secciones rectas de los diedros coinciden y también los diedros deberán coincidir. ■

Como consecuencia de lo anterior, es inmediato justificar que:

Teorema. (Transporte de un diedro) *Dado un diedro $\widehat{\alpha\beta}$, un semiplano α' de borde r' y un semiespacio de borde α' existirá un único semiplano β' de borde r', e incluido en el semiespacio dado, tal que*

$$\widehat{\alpha'\beta'} \equiv \widehat{\alpha\beta} \ .$$

6. Planos perpendiculares. Diedros rectos

Definiciones.

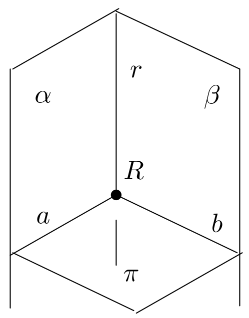
- Se dice que un **diedro es recto** si alguna de sus secciones rectas (y en definitiva cualquiera de ellas) es un ángulo recto.
- Se dice que dos planos son **perpendiculares** si cada uno incluye a una cara de un diedro recto.

Es inmediato que *si dos planos son perpendiculares, entonces cualquiera de los cuatro diedros determinados por ellos resulta un diedro recto.* Se cumple que:

Proposición. (Criterio de perpendicularidad de planos) *Dos planos son perpendiculares si y sólo si uno cualquiera de ellos incluye a una recta perpendicular al otro.*

En realidad, se puede justificar que cada uno de esos planos incluye a infinitas rectas perpendiculares al otro: a todas las perpendiculares al otro que pasan por un punto de él.

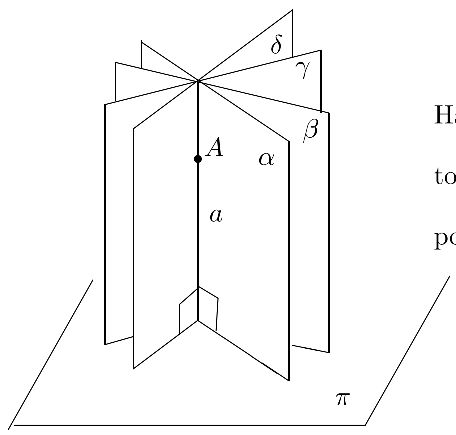
Demostración.
Sean α_o y β_o los dos planos, que se cortan en r, y $\widehat{\alpha\beta}$ uno de los diedros involucrados, con $\alpha \subset \alpha_o$ y $\beta \subset \beta_o$.



- **Si α_o y β_o son perpendiculares . . .** • Sea R un punto de r y π el plano perpendicular a r por R. Si llamamos $a = \alpha_o \cap \pi$ y $b = \beta_o \cap \pi$, ocurrirá, por ser $\widehat{\alpha\beta}$ recto, que $a \perp b$. Como además es $a \perp r$, podemos asegurar que a es perpendicular al plano β_o determinado por b y r. Es decir, α_o incluye a la recta a perpendicular a β_o.
- **Si α_o incluye a una recta a perpendicular a β_o . . .** • Seguro que a es concurrente con r, y $a \perp r$. Sea R tal que $R \in r \cap a$.
  Sea b la recta perpendicular a a y a r por R. El plano determinado por a y b resultará perpendicular a r y como $a \perp \beta_o$ debe ocurrir que $b \subset \beta_o$.
  Entonces las rectas a y b, que son perpendiculares, incluyen, entre las dos, a la sección recta de $\widehat{\alpha\beta}$.
  Es decir que α_o y β_o son perpendiculares. ∎

Corolario. *Dados un plano π y un punto A, existen infinitos planos que pasan por A y son perpendiculares a π*

Demostración.



Haz de planos de eje a;

todos perpendiculares a π

porque $a \perp \pi$

Consideramos la única recta a que pasa por A y es perpendicular a π. Todas los planos que incluyen a la recta a, y nada más que ellos, entre los que pasan por A, son perpendiculares a π. ∎

Capítulo VII

Paralelismo y traslaciones. Aplicaciones

1. Introducción

Analizaremos un nuevo tipo de transformación rígida: la traslación. Recordamos que una t.r. μ queda determinada dando una semirrecta y su homóloga o correspondiente y un semiplano α de borde la semirrecta y su homólogo. Y que aunque no conozcamos el nombre usual para la transformación, igual podemos "construir" el correspondiente por μ de un punto cualquiera del espacio, usando reiteradamente el transporte de segmentos y/o ángulos y/o de diedros. Pero el reconocer a las t.r. por sus nombres y aprender algunas de sus propiedades nos permite encontrar correspondientes de puntos en forma más simple, y usar t.r. para demostrar teoremas o resolver problemas con menos trabajo adicional.

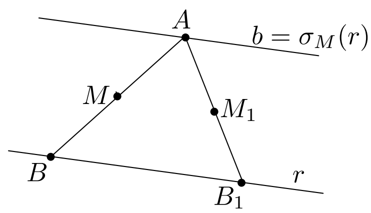
Hemos podido analizar las propiedades de las simetrías centrales y axiales en un plano sin necesidad de contar con la unicidad de recta paralela a una dada por un punto. Sin embargo, necesitamos de esa unicidad para poder justificar las propiedades que la intuición nos sugiere esperar de las traslaciones.

2. Paralelismo

Para que dos rectas sean paralelas, deben, o bien ser la misma recta o bien ser coplanares y tener intersección vacía.

Consideremos el problema de encontrar, dada una recta r y un punto A no perteneciente a la misma, una recta que pase por A y sea paralela a r. Veremos que, gracias a las simetrías centrales en un plano, podemos justificar que el problema tiene solución:

Sea π el plano que incluye a r y a A, con $A \notin r$. Elijamos $B \in r$. Tomemos M punto medio de $\overline{AB}$, y consideremos, en el plano π, la simetría central de centro M, σ_M. Llamemos $b = \sigma_M(r)$. Se cumple que b es una solución al problema, pues pasa por A y es paralela a r.



¿Cuántas soluciones hay?. Con el método descripto, si elegimos otro punto B, llamémosle B_1, obtendríamos una paralela b_1. ¿Será $b = b_1$?. ¿No habrá otros métodos para producir paralelas que den resultados diferentes? O incluso, ¿nos encontraremos "por casualidad" con una paralela distinta?. Por ejemplo, podríamos haber encontrado en primer lugar la perpendicular a r por A, recta p, y luego la perpendicular a p, en el plano π, por A que resultaría paralela a r por A.

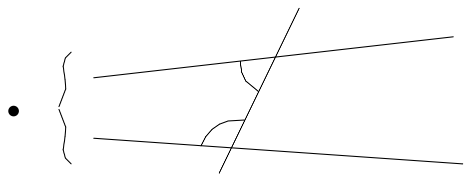
La intuición nos dice que sólo hay una paralela. Sin embargo, se puede demostrar que los axiomas que tenemos hasta ahora no nos permiten justificarlo. De hecho, el tema está relacionado con el quinto postulado de Euclides que durante más de veinte siglos tuvo en jaque a muchos matemáticos. Ellos intentaban demostrar que ese quinto postulado de Euclides era una consecuencia lógica de los otros postulados. El tema se resolvió cuando se reconoció, es decir se demostró, que hay otras geometrías "no euclideanas", pero "tan buenas como ella" en las que hay más de una paralela (geometría no euclideana, hiperbólica).

Como nosotros estamos interesados en la geometría habitual introduciremos un axioma nuevo.

Axioma 11 (De la paralela) *Por un punto exterior a una recta pasa exactamente una recta paralela a la dada.*

Lo novedoso que nos dice este axioma es que no puede haber dos rectas distintas que pasen por un punto dado y sean paralelas a una recta dada. La parte de existencia, incluida en el enunciado, ya es consecuencia de los axiomas anteriores, especialmente el de las t.r.

Nota. El famoso quinto postulado de Euclides no nombra a rectas paralelas sino que se refiere a que si dos rectas de un plano forman con una transversal, y de un lado de ella, ángulos (como los marcados en la figura siguiente) que suman menos que un llano, se cortarán de ese lado de la transversal. Efectivamente, en la figura anterior, con la recta paralela b que encontramos utilizando la simetría central de centro M tenemos ángulos que suman un llano; tanto de un lado de la transversal $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a M como del otro; pero sin el axioma de la paralela no tendríamos modo de asegurar que esa paralela b respecto de otra transversal, por ejemplo la $\overleftrightarrow{AB_1}$, cumple con la misma condición.

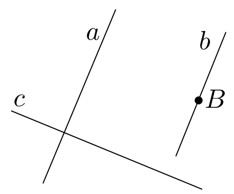


Perpendicularidad y paralelismo

En la pág. 48 vimos que si dos rectas son perpendiculares a una tercera, y las tres son coplanares, en π, entonces las dos primeras rectas son paralelas. Ahora podemos justificar que:

Proposición. *Si a, b y c son coplanares, $a \perp c$ y $a \parallel b$, entonces $b \perp c$.*

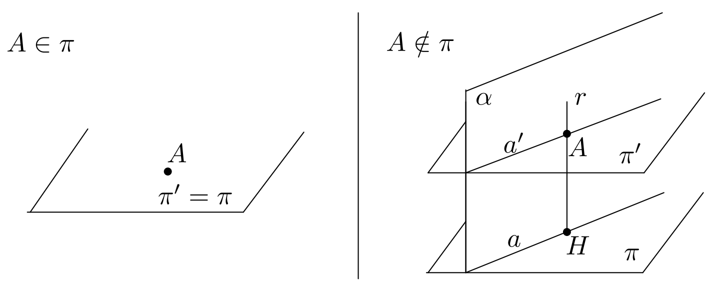
Demostración.



Sea $B \in b$ con $B \notin c$, y sea p la recta por B con $p \perp c$. Por la proposición recién mencionada, $p \parallel b$. Entonces, por el axioma de la paralela aplicado a la recta a y al punto B, debe ser $p = b$, y en consecuencia $b \perp c$. ∎

Proposición. (Existencia y unicidad de plano paralelo a otro por un punto dado) *Dado un plano π y un punto A hay exactamente un plano π' que pasa por A con $\pi' \parallel \pi$.*

Demostración.



Si el punto $A \in \pi$, entonces es trivial probar que la única solución para π' es $\pi' = \pi$.
Supongamos que $A \notin \pi$. Sea H el pie de la perpendicular desde A a π. (Hay una única recta perpendicular por A a π). Cualquier plano α que contenga a A y a H cortará a π y al posible π' según rectas a y a' que resultarán paralelas. Y como $a \perp r$ y las rectas a, a' y r son coplanares, por la proposición anterior, también ocurrirá que $a' \perp r$. Si existe tal plano π', debe incluir a todas las rectas por A perpendiculares a r; es decir π' debe coincidir con el plano perpendicular a r por A. Ese plano π' efectivamente existe y es único; y cumple $A \in \pi' \parallel \pi$. ∎

Es inmediato que

Proposición. *Si una recta r es paralela a un plano π, entonces cualquier plano que incluya a la recta r, que no sea paralelo a π, intersectará a π según una recta paralela a r.*

En la pág. 63, vimos que *si dos planos son perpendiculares a una recta entonces son paralelos*; y en la pág. 66, *si dos rectas son perpendiculares a un plano entonces son paralelas.* Dejamos como ejercicio:

Ejercicio 2.1.- Justificar que si un plano es perpendicular a una recta y paralelo a otro plano, entonces el otro plano también es perpendicular a la recta.
O en otras palabras:
si una recta r es perpendicular a un plano π, entonces r es perpendicular a todos los planos paralelos a π.

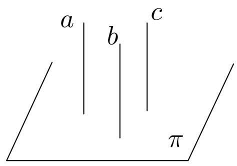
Ejercicio 2.2.- Justificar que *si una recta es perpendicular a un plano y paralela a otra recta, entonces la otra recta también es perpendicular al plano.*
O de otro modo:
si un plano π es perpendicular a una recta r, entonces es perpendicular a todas las rectas paralelas a r.

Transitividad del paralelismo entre rectas y del paralelismo entre planos

Antes de contar con el axioma de la paralela teníamos, por definición, que cualquier recta es paralela a sí misma y que si una recta es paralela a otra entonces la otra es paralela a la primera. Recién ahora, podemos justificar que si dos rectas son paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

Si $a \parallel b$ y $b \parallel c$, seguro que a y b están incluidas en un plano, llamémosle α; y b y c estarán incluidas en un plano llamémosle γ. Claro que no es obligatorio que α y γ coincidan: no es obligatorio que a, b y c sean coplanares. Pero sean o no coplanares las tres rectas, el hecho de que dos rectas perpendiculares a un mismo plano resultan paralelas, nos será útil para justificar que también a y c serán coplanares y paralelas.

Proposición. *Sean a, b, c rectas de Ω. Si $a \parallel b$ y $b \parallel c$ entonces $a \parallel c$.*



Demostración. Si $a = b$, o si $b = c$, o si $a = c$, la demostración es trivial; por ello nos ocuparemos del caso $a \neq b \neq c \neq a$.
Por ser $a \parallel b \neq a$, $a \cap b = \emptyset$, y a y b coplanares.
Por ser $b \parallel c \neq b$, $b \cap c = \emptyset$, y b y c coplanares.
Debe ocurrir que $a \cap c = \emptyset$, pues de otro modo por el punto común a a y c tendríamos a a y c, dos rectas distintas a y c paralelas a b, en contradicción con el axioma de la paralela.
Sea π un plano perpendicular a b. Como $a \parallel b$, también se cumplirá $a \perp \pi$ (Ver pág. 66).
Análogamente, como $c \parallel b$, será $c \perp \pi$.
En consecuencia, $a \parallel c$.
∎

Proposición. *Si dos planos son paralelos a otro plano, entonces son paralelos entre sí.*

Demostración. Es inmediato, gracias a la unicidad del plano paralelo a otro por un punto dado. ∎

Proposición. *Si una recta es paralela a otra recta y a un plano, entonces la otra recta también es paralela al plano.*

Demostración. Supongamos $a \parallel b$ y $a \parallel \pi$. Sabemos que una recta y un plano son paralelos si y sólo si hay una recta del plano que es paralela a la recta. Sea $p \subset \pi$ y $p \parallel a$. Por transitividad del paralelismo de rectas, $b \parallel p$ y en consecuencia $b \parallel \pi$ ∎

Nota. No siempre dos "cosas" paralelas a una tercera son paralelas entre sí:
Por ejemplo si a, b son rectas y π es un plano, de $a \parallel \pi \parallel b$, no podemos inferir nada especial respecto de a y b: puede ocurrir que a y b sean paralelas, secantes o alabeadas.

Intersección unitaria y paralelismo

Se deja como ejercicio probar las siguientes propiedades:

Ejercicio 2.3.- Justificar:

- *Si las rectas a, b y c son coplanares, a y b son secantes y a y c son paralelas, entonces b y c son secantes.*
- Si en el inciso anterior se omite la condición de que las rectas sean coplanares, puede ocurrir que b y c sean secantes o alabeadas.
- *Si la recta a y el plano β son secantes y a es paralela a la recta c, entonces c y β son secantes.*
- *Si la recta a y el plano β son secantes y β es paralelo al plano γ, entonces a y γ son secantes.*

Va a resultar conveniente contar con las definiciones siguientes:

Definiciones. Diremos que dos semirrectas son **paralelas** si son paralelas las rectas que incluyen a las semirrectas. En forma similar se define **paralelismo** entre segmentos y/o semirrectas y/o rectas.

3. Sentido para haces de rectas paralelas

Si nos dan dos rectas paralelas, cada una con un orden natural elegido, podemos fácilmente dar un significado a si tienen o no igual sentido; en cambio no hay un modo claro de hacerlo para rectas no paralelas, es decir para rectas secantes o alabeadas ...

Cada semirrecta sirve para "indicar" un orden entre los puntos de la recta que la incluye: el orden natural en el que todos los puntos de la semirrecta abierta siguen al origen de la misma. Gracias al axioma de la paralela, también una semirrecta nos va a servir para indicar un orden en cada una de las infinitas rectas paralelas a ella.

Sólo daremos un significado a tener o indicar <u>igual sentido</u> o <u>sentidos contrarios</u> al referirnos a semirrectas paralelas, es decir, incluidas en rectas paralelas.

Definiciones.

- De dos semirrectas paralelas, distintas o no, se dice que **tienen igual sentido** o que **son de igual sentido** o que **indican igual sentido** si se cumple alguna de las condiciones siguientes:
    - las semirrectas son colineales y una está incluida en la otra.
    - las semirrectas, siendo paralelas, no son colineales y ambas están incluidas en un mismo semiplano de borde la recta que pasa por los orígenes de las semirrectas;

y se dice que **tienen sentidos contrarios** o que **son de sentidos contrarios**, o que **indican sentidos contrarios** si, siendo paralelas, no se cumple que tengan igual sentido.

La definición anterior que permite referirse a dos semirrectas paralelas diciendo que <u>tienen igual sentido</u> o <u>tienen sentidos contrarios</u>, es razonable ya que se cumple lo siguiente

Propiedades

Sean a, b y c semirrectas

(a). *a y b tienen igual sentido si y sólo si a y la opuesta de b tienen sentidos contrarios.*

(b). *Si a y b tienen igual sentido, y b y c tienen igual sentido, entonces también a y c tienen igual sentido.*

(c). *Si a y b tienen sentidos contrarios, y b y c tienen sentidos contrarios, entonces a y c tienen igual sentido.*

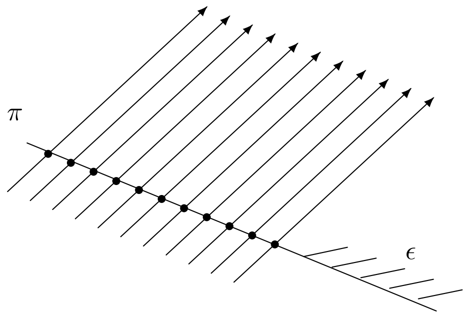
(d). *Si a y b tienen igual sentido y b y c tienen sentidos contrarios, entonces a y c tienen sentidos contrarios.*

Por último, también se cumple:

Proposición. *Dos semirrectas a y b son de distinto sentido si y sólo si hay alguna simetría central, en un plano que incluya a las semirrectas, tal que una es la imagen de la otra en esa simetría central.*

No justificaremos todas esas propiedades; para hacerlo, convendría utilizar definiciones algo más "complicadas de estos conceptos, usando intersecciones con semiespacios (o semiplanos si trabajamos en un plano), pero que permiten justificaciones más "sencillas".

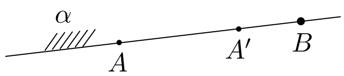
Dada una familia de rectas paralelas, el modo "práctico" de elegir un orden para todas ellas es elegir un plano π no paralelo a una recta de la familia, que será secante con cualquier recta de la familia. Si ϵ es uno cualquiera de los semiespacios de borde π, entonces para cada recta del haz podemos seleccionar la semirrecta de ella con origen en π e incluida en ϵ; y todas esas semirrectas tienen el mismo sentido. En la ilustración, el plano π se visualiza "de canto" como una recta, y el semiespacio ϵ como un semiplano.



4. Traslación

Definiciones.

- Una t.r. τ se llama **traslación** si existe un par (b, β) —donde β es uno de los semiplanos cuyo borde incluye a la semirrecta b—, tal que $\tau(b)$ está incluida en b y $\tau(\beta) = \beta$. (Debemos exigir $\tau(b) \neq b$ para que esta τ no sea la transformación identidad)
- Dados dos puntos distintos A y A' de un plano π se llama **traslación**, **en el plano π, que envía A a A'**, a la t.r. τ en la que $\tau(\overrightarrow{AA'})$ es la semirrecta opuesta a la $\overrightarrow{A'A}$ y $\tau(\alpha) = \alpha$, donde α es uno de los dos semiplanos de π de borde $\overleftrightarrow{AA'}$. Se suele hablar de traslación, en el plano π, de **vector** AA'. A la recta $\overleftrightarrow{AA'}$, la llamaremos **guía de la traslación.vector de una traslación**



Traslación τ en la que $\tau(A) = A'$:
Si A' entre A y B, podemos escribir:

$$\begin{cases} \tau(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{A'B} \\ \tau(\alpha) = \alpha \end{cases}$$

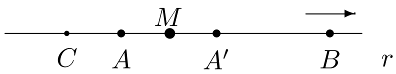
- También llamaremos traslación a la t.r. identidad: hablaremos de **traslación identidad** o **traslación nula**.

Veremos después que el plano π no juega un papel importante: cualquier plano que contenga a la recta $\overleftrightarrow{AA'}$ servirá para describir a la misma t.r. Podremos hablar simplemente de traslación que envía A a A', y simplificar la definición de traslación para decir:
Definición. (Futura) Dados dos puntos distintos A y A' se llama **traslación que envía A a A'**, o **traslación de vector** AA' a la t.r. τ en la que $\tau(\overrightarrow{AA'})$ es la semirrecta opuesta a la $\overrightarrow{A'A}$ y $\tau(\alpha) = \alpha$, donde α es uno cualquiera de los semiplanos de borde $\overleftrightarrow{AA'}$.

Puede resultar cómodo utilizar la notación $\tau_{AA'}$, para referirse a esa traslación. Tampoco los puntos A y A' son especiales: veremos que cualquier par de puntos correspondientes en una traslación nos permiten describirla del modo anterior. Así que tendremos mucha libertad para elegir un par de correspondientes para identificar a una traslación.
Nota. Observemos que, entre las t.r. a las que hemos dado un nombre, la traslación es la primera que no es involutiva: Tanto en una simetría central en π, como en una simetría axial, si la imagen de un punto A de π era A', entonces la imagen de A' era A. En cambio, si en una traslación τ no nula $\tau(A) = A'$, como $\tau(\overrightarrow{AA'})$ es la opuesta de la $\overrightarrow{A'A}$, y $A' \in \overrightarrow{AA'}$, entonces $\tau(A') \notin \overrightarrow{A'A}$ y ocurrirá $\tau(A') \neq A$.

Proposición. *La traslación τ definida recientemente se puede expresar como la composición de dos simetrías centrales, en π, de centros A y el punto medio de $\overline{AA'}$.*

Demostración. Sea $r = \overleftrightarrow{AA'}$, y M el punto medio de $\overline{AA'}$; sean σ_A y σ_M las simetrías centrales en π de centros A y M respectivamente. (O de centros M y A').



Queremos probar que

$$\tau = \sigma_M \circ \sigma_A.$$

Para ello calculamos las imágenes, por las t.r. de ambos miembros, de una semirrecta y un semiplano apropiados. Para simplificar la exposición, elijamos para r el orden en que A' sigue a A. Entonces M sigue a A y M precede a A'. Elijamos además un punto B que siga a A' y otro C que preceda a A.
$\tau(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{A'B}$; $\tau(\alpha) = \alpha$
$(\sigma_M \circ \sigma_A)(\overrightarrow{AA'}) = \sigma_M(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'B}$
$\sigma_M \circ \sigma_A(\alpha) = \sigma_M(\alpha') = \alpha.$
Como τ y $\sigma_M \circ \sigma_A$ actúan del mismo modo sobre $\overrightarrow{AA'}$ y sobre α, concluimos que ambas t.r. son la misma.
Similarmente se demuestra

$$\tau = \sigma_{A'} \circ \sigma_M$$

■

Ejercicio 4.1.- Verificar que *la composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos no coincidentes, es una traslación de guía paralela a una recta perpendicular a los ejes de las simetrías.* Expresar como composición de dos simetrías axiales, a una traslación cualquiera.

Propiedades de las traslaciones

Todas las traslaciones que aparecen en esta sección son distintas de la traslación identidad.

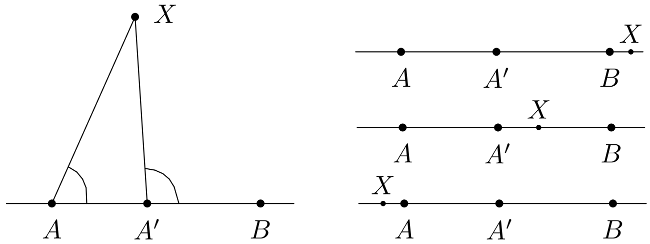
Sean: A y A' dos puntos distintos de π; α uno de los semiplanos de π de borde $\overleftrightarrow{AA'}$; y τ la traslación que lleva A a A', es decir, la t.r. que envía la semirrecta $\overrightarrow{AA'}$ a la semirrecta opuesta de la $\overrightarrow{A'A}$ y que envía α a α.

Para simplificar la exposición sea $r = \overleftrightarrow{AA'}$, α' el semiplano opuesto al α, y B tal que A' está entre A y B. Por definición de traslación, será $\tau(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{A'B}$ ya que $\overrightarrow{A'B}$ es la semirrecta opuesta de la $\overrightarrow{A'A}$.

(a). *No hay ningún punto fijo en τ.* (Reiteramos que nos referimos a traslaciones no nulas).

Demostración.

- Ningún punto de $\overleftrightarrow{AA'}$ es un punto fijo. Si hubiera algún X que lo fuera, como con seguridad $X \notin \overline{AA'}$, tendríamos que los segmentos congruentes $\overline{AX}$ y $\overline{A'X}$, serían uno parte propia del otro.



- Si un punto X no alineado con A y A' fuera fijo, tendríamos un triángulo $\overset{\triangle}{AA'X}$, para el que $\widehat{XA'B}$ es un ángulo exterior, que debería ser congruente con $\widehat{XAA'}$, uno de los ángulos interiores no adyacentes, contradiciendo a que un ángulo externo de un triángulo es mayor que cualquiera de los interiores no adyacentes. ■

(b). *La recta r, guía de la traslación, es estable y un orden natural (cualquiera de los dos), para los puntos de r es preservado por la traslación.*

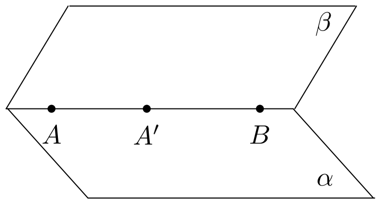
Demostración. A la recta r, que incluye a $\overrightarrow{AA'}$, le corresponde la recta que incluye a $\overrightarrow{A'B}$; y esta es también r.
Sabemos que cualquier t.r. preserva la relación "estar entre". Entonces, respecto de una recta que sea estable en una t.r. la única posibilidad es que un orden para esa recta se preserve o que se invierta.
Los órdenes indicados por la semirrectas $\overrightarrow{AA'}$ y por su imagen la semirrecta $\overrightarrow{A'B}$ coinciden: el orden en el que A' sigue a A, es el mismo en el que B sigue a A', pues A' está entre A y B.
■

(c). *El semiplano α es estable y en consecuencia α' también lo es, así como el plano π. Y τ preserva la orientación para π, es decir, es directa en π*

Demostración. La orientación del plano dada por la semirrecta $\overrightarrow{AA'}$ y el semiplano α es la misma que la dada por la semirrecta $\overrightarrow{A'B}$ y el semiplano α, porque ambos semiplanos coinciden y el orden dado para el borde es el mismo. (Se entiende fácilmente que recorriendo el borde del semiplano en el sentido dado por la semirrecta, el semiplano queda, en ambos casos, del mismo lado). ∎

(d). *Cualquier semiplano de borde r es estable en τ. En consecuencia, la traslación, que en el plano π, envía A a A' es la misma que la traslación que, en cualquier otro plano que incluya a r, envía A a A'.*

Demostración.



Sea β un semiplano no coplanar con α de borde r, y ϵ el semiespacio de borde α, es decir de borde π, que incluye a β. Si $\beta_1 = \tau(\beta)$ deberá ocurrir que los diedros $\widehat{\alpha\beta}$ y $\widehat{\alpha\beta_1}$ sean congruentes, con β_1 también de borde r e incluido en ϵ. Por el transporte del diedro, debe ocurrir que $\beta_1 = \beta$. ∎

Nota. Con esta propiedad, ya podemos dejar de mencionar cuál es el plano π que incluye a α: alcanza con referirse a la traslación que envía A a A'.

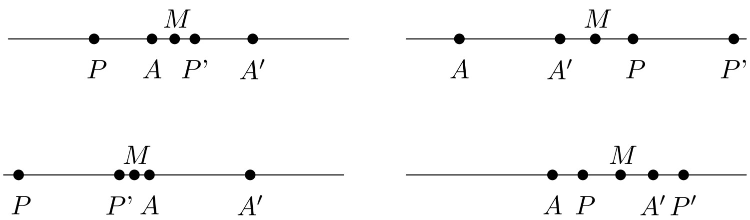
(e). *Cualquier recta, coplanar con r, se transforma por τ en una paralela a ella. Más aun, la imagen por τ de cualquier semirrecta es otra semirrecta de igual sentido.*

Demostración. Sea π un plano que incluya a $\overleftrightarrow{AA'}$ y a la recta o semirrecta en cuestión. Expresamos, como antes, a τ como composición de dos simetrías centrales en π: $\tau = \sigma_M \circ \sigma_A$.
Sea s una recta de π, $s' = \sigma_A(s)$ y $s'' = \sigma_M(s') = \tau(s)$. Se cumplirá, por propiedades de las simetrías centrales, que $s \parallel s' \parallel s''$ y por transitividad del paralelismo entre rectas, $s \parallel s''$.
Sea p una semirrecta de π, $p' = \sigma_A(p)$ y $p'' = \sigma_M(p') = \tau(p)$. Se cumplirá que p y p' tienen sentidos contrarios y que p' y p'' tienen sentidos contrarios por lo que p y p'' tienen igual sentido. ∎

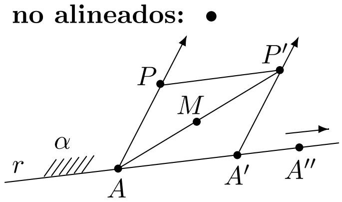
(f). *Sea P un punto con $P \neq A$, y $P' = \tau(P)$. Entonces los puntos medios de los segmentos $\overline{AP'}$ y $\overline{A'P}$ coinciden.*

Demostración. Sea M el punto medio de $\overline{AP'}$. Debemos mostrar que también M es punto medio de $\overline{A'P}$; ; o lo que es equivalente, que si llamamos σ_M a la simetría central, en un plano π que contenga a A, A' y P, de centro M; y llamamos $X = \sigma_M(P)$, se cumple que $X = A'$.
Los casos que podemos distinguir según las posiciones relativas de los puntos de interés son varios.

- ***A*, *P* y *A′* alineados:** • (Se han ilustrado cuatro situaciones)



- ***A*, *P* y *A′* no alineados:** •



$\tau(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{A'A''}$, $\quad \tau(\alpha) = \alpha$
$P' = \tau(P)$
M punto medio de $\overline{AP'}$
σ_M simetría central, en π, de centro M
$\sigma_M(P)$ debe ser A'

Para todos esos casos vale la misma demostración:
Consideramos tres semirrectas paralelas:

$$h = \overrightarrow{AP}, \quad h' = \tau(h) = \overrightarrow{A'P'}, \quad h'' = \sigma_M(h)$$

. Se cumple que el origen de h'' es P'; h y h' tienen igual sentido y h y h'' tienen sentidos contrarios, por lo que h' y h'' tienen sentidos contrarios; en particular h' y h'' son paralelas. Y como tanto h' como h'' pasan por P' debe ocurrir que h' y h'' son colineales y $h'' = \overrightarrow{P'A'}$.
Además como $\tau(\overline{AP}) = \overline{A'P'}$, y $\sigma_M(\overline{AP}) \equiv \overline{AP}$, por transporte de segmento debe ocurrir $\sigma_M(P) = A'$ por lo que M será punto medio de $\overline{PA'}$.
■

(g). *Sea $P \in \pi$, con $P \neq A$ y $P' = \tau(P)$. Entonces $\overleftrightarrow{PP'} \parallel \overleftrightarrow{AA'}$ y $\overline{PP'} \equiv \overline{AA'}$*

Demostración. Sea M el punto medio de $\overline{AP'}$, que, por el inciso anterior, también es punto medio de $\overline{A'P}$. Sea σ_M la simetría central, en π de centro M. Se cumplirá:

$$\sigma_M(A) = P', \qquad \sigma_M(A') = P, \qquad \sigma_M(\overline{AA'}) = \overline{PP'}$$

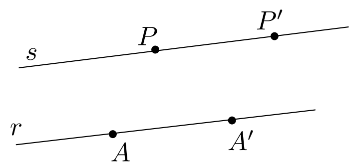
por lo que,

$$\overline{AA'} \equiv \overline{P'P} = \overline{PP'}, \quad \text{y también ,} \quad \overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{PP'}$$

■

(h). *Sea s una recta. s es estable en τ si y sólo si $s \parallel r$.*

Demostración.
- **Si $s \parallel r$, entonces $\tau(s) = s$:** •
  Si $s = r$ ya lo hemos demostrado.
  Si $s \neq r$, sea $P \in s$, y $P' = \tau(P)$. Debemos justificar que cualquiera sea $P \in s$, $P' \in s$.
  Por la propiedad (g), $\overleftrightarrow{PP'} \parallel r$; y ciertamente $P \in \overleftrightarrow{PP'}$. También $s \parallel r$ y $P \in s$; entonces, por unicidad de la paralela por un punto, debe ocurrir $\overleftrightarrow{PP'} = s$; es decir $P' \in s$.



- **Si la recta s cumple $\tau(s) = s$, entonces $s \parallel r$:** •
  Sea $P \in s$ y $P' = \tau(P)$. Al ser $\tau(s) = s$, seguramente $P' \in s$; y como $P' \neq P$, tendremos que $s = \overleftrightarrow{PP'}$. Entonces, por la propiedad (g), $\overleftrightarrow{PP'} \parallel r$. ■

(i). *τ queda determinada dando cualquier P y su correspondiente por τ, P', como la traslación que envía P a P'.* $\overleftrightarrow{PP'}$ es también guía de la traslación.

Demostración. Lo único que necesitamos probar es que $\tau(\overrightarrow{PP'})$ es la semirrecta opuesta de la $\overrightarrow{P'P}$ y que uno de los infinitos semiplanos de borde $\overleftrightarrow{PP'}$ es estable.
Sea s la paralela a r por P. Por la propiedad anterior, $P' = \tau(P) \in s = \tau(s)$, y $\tau(\overrightarrow{PP'})$ es una semirrecta de origen P' y de igual sentido que la $\overrightarrow{PP'}$; es decir es la semirrecta opuesta de la $\overrightarrow{P'P}$.
En cuanto a uno de los semiplanos de borde $\overleftrightarrow{PP'}$:
- Si $s = r$, es decir si $P \in r$, α tiene por borde a r y ya sabemos que $\tau(\alpha) = \alpha$.
- Si $s \neq r$, es decir $P \notin r$, como $s \parallel r$, r está incluida en uno de los semiplanos de borde s. Por ser r y s estables en τ resultará que el semiplano de borde r que incluye a r es estable en τ ya que es el mismo semiplano que el de borde $\tau(s)$ que incluye a $\tau(r)$. ■

(j). *Las guías de una traslación no nula son las rectas estables de la misma. Es decir, las guías de la traslación τ (que podemos denotar $\tau_{AA'}$) son la recta $\overleftrightarrow{AA'}$ y todas sus paralelas.* Es inmediato.

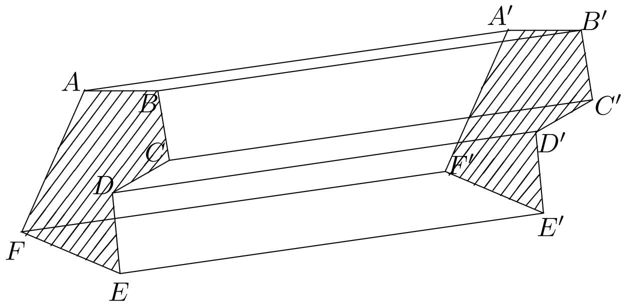
(k). *Cualquier recta se transforma por τ en una paralela a ella.* Es la propiedad (e), pero ahora sin pedir que sea coplanar con $\overleftrightarrow{AA'}$, ya que el papel del punto A lo puede hacer cualquier punto; por ejemplo, un punto de la recta en cuestión.

(l). *Un plano δ es estable en τ si y sólo si δ es paralelo a $\overleftrightarrow{AA'}$.*

Demostración.

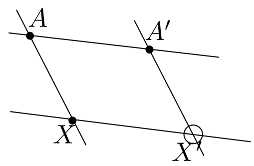
- **Si $\delta \parallel r$, entonces $\tau(\delta) = \delta$:** •
  Si $P \in \delta$, por (g), P' pertenecerá a la paralela a r por P; y esa paralela está incluida en δ.
- **Si $\tau(\delta) = \delta$, entonces $\delta \parallel r$:** •
  Si $\delta \cap r = \emptyset$, se cumple que $\delta \parallel r$.
  Y si $\delta \cap r \neq \emptyset$, consideramos un punto $H \in \delta \cap r$.
  Se cumple $\tau(H) \in \tau(\delta \cap r) = \tau(\delta) \cap \tau(r) = \delta \cap r$.
  Como $\tau(H) \neq H$, podemos hablar de la recta $\overleftrightarrow{H\tau(H)}$. Tendremos $\overleftrightarrow{H\tau(H)} \subset \delta \cap r$, lo cual sólo es posible con $r = \overleftrightarrow{H\tau(H)} \subset \delta$, es decir $r \parallel \delta$. ∎

La propiedad (g) nos permite reconocer fácilmente dos figuras correspondientes en una traslación: los pares de puntos correspondientes determinan segmentos paralelos y congruentes.



Figuras correspondientes en la traslación $\tau_{AA'}$.

Además, las propiedades (e) y (g) nos proveen de un método para encontrar imágenes de puntos en una traslación utilizando rectas paralelas:



Si X A y A' no están alineados, para encontrar $\tau_{AA'}(X)$ basta intersectar la paralela a $\overleftrightarrow{AA'}$ por X con la paralela a $\overleftrightarrow{AX}$ por A'.

Destacamos la siguiente propiedad:

Proposición. *Una traslación se puede expresar, de infinitas maneras, como composición de dos simetrías centrales en un plano.*

Demostración. Sea τ la traslación en cuestión. Elijamos un punto A de Ω. Sea $A' = \tau(A)$ y sea π un plano que contenga a A y a A'. La proposición de pág. 75, nos da un modo de expresar a τ como composición de dos simetrías centrales en un plano Y tenemos tantas soluciones como posibles elecciones de A y π. ∎

5. Composición de traslaciones

El subconjunto de las t.r. que son traslaciones es muy especial por cuanto, según demostraremos a continuación, la composición de dos de ellas es también una traslación. No pasa lo mismo con las otras t.r. estudiadas hasta ahora: por ejemplo, la composición de dos simetrías centrales en un plano nunca es una simetría central (es una traslación); La composición de dos simetrías axiales tampoco es una simetría axial.

Insistimos una vez más que para identificar una t.r., μ, es necesario y suficiente determinar cómo actúa μ sobre alguna semirrecta y algún semiplano con borde esa semirrecta.

Está claro que si μ es la composición de dos t.r. tales que ambas dejan estable a un mismo plano π, entonces también μ dejará estable a π; y luego de determinar cómo actúa μ sobre una semirrecta, la acción sobre uno de los dos semiplanos de borde esa semirrecta se puede deducir a partir de que las t.r. a componer sean directas o inversas en π.

Concretamente, es fácil convencerse de que, en relación a un plano estable π,

La composición de dos t.r. directas en π es una t.r. directa en π y la composición de una t.r. directa y otra inversa en π, en cualquier orden, es una t.r. inversa en π.

En lo que sigue analizaremos la composición de traslaciones.

Para $A \neq B$, utilizamos τ_{AB} para denotar a la traslación que envía A a B. En adelante aceptaremos denotar a la t.r. identidad—que hemos convenido en llamar también traslación nula—con τ_{HH}, donde H es cualquier punto.

Nota. No debemos confundirnos con la utilización de la palabra inversa con dos propósitos y significados diferentes: Una traslación es una t.r. directa en cualquier plano que sea estable en la t.r., y por lo tanto no es una t.r. inversa inversa en ningún plano. La inversa de una traslación es también una traslación. Por lo tanto, la <u>inversa</u> de una traslación <u>no</u> es una t.r. <u>inversa</u> en ningún plano ...

Propiedades

(a). *La t.r. inversa de la traslación que lleva A a B es también una traslación: la que lleva B a A. Es decir:*

$$(\tau_{AB})^{-1} = \tau_{BA}.$$

En consecuencia, una traslación no nula y su inversa tienen las mismas guías.

Demostración. Se deja como ejercicio. Para la primera parte alcanza con verificar que $\tau_{AB} \circ \tau_{BA}$ es la transformación identidad. ∎

(b). *La composición de dos traslaciones es una traslación (incluimos como posible resultado la traslación nula)*

Demostración. Queremos analizar la composición $\mu_2 \circ \mu_1$ con μ_1 y μ_2 traslaciones.
La demostración es trivial, si una de las dos traslaciones es la identidad.

- Si μ_1 y μ_2 son distintas de la identidad, elegimos un punto A y sean $B = \mu_1(A)$ y $C = \mu_2(B)$. Entonces lo que debemos demostrar es que:

$$\mu_2 \circ \mu_1 = \tau_{BC} \circ \tau_{AB} = \tau_{AC},$$

Aplicaremos la posibilidad de expresar las traslaciones como composición de simetrías centrales en un plano (ver pág. 75), en las dos formas indicadas. Consideramos como plano para las simetrías centrales, uno que incluya a A, B y C. (Si A, B y C están alineados habrá infinitos planos esas condiciones. Si no lo están habrá exactamente uno).
Sea M el punto medio de $\overline{AB}$ y N el punto medio de $\overline{BC}$.
Se cumplirá $\tau_{AB} = \sigma_B \circ \sigma_M$ y $\tau_{BC} = \sigma_N \circ \sigma_B$.
En consecuencia:

$$\tau_{BC} \circ \tau_{AB} = (\sigma_N \circ \sigma_B) \circ (\sigma_B \circ \sigma_M) = \sigma_N \circ (\sigma_B \circ \sigma_B) \circ \sigma_N = \sigma_N \circ \sigma_M$$

Si $M = N$, la composición es la identidad, que llamamos traslación nula.
Si $M \neq N$, la composición es la traslación que envía M a M' donde M' es tal que N es punto medio de $\overline{MM'}$.
Como además $\tau_{BC} \circ \tau_{AB} = \tau_{BC}(\tau_{AB}(A)) = \tau_{BC}(B) = C$,

$$\tau_{BC} \circ \tau_{AB} = \tau_{AC}$$

∎

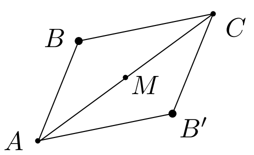
(c). *La composición de traslaciones es conmutativa.*

Demostración. Si alguna de las traslaciones es la identidad, la propiedad es trivial. Eligiendo, como antes, puntos para nombrar a las traslaciones. Queremos demostrar que para A, B y C cualesquiera y distintos,

$$\tau_{BC} \circ \tau_{AB} = \tau_{AB} \circ \tau_{BC}.$$

Los puntos elegidos hacen que sea muy sencilla la primera de las composiciones: $\tau_{BC} \circ \tau_{AB} = \tau_{AC}$.
Para la otra composición deberemos esforzarnos más.

- **Caso en que A, B y C no están alineados:** • Es decir que las traslaciones no tienen guías paralelas.



Sea B' tal que $\overleftrightarrow{B'C} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AB'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.
$\tau_{AB}(B') = C$, es decir $\tau_{AB} = \tau_{B'C}$
$\tau_{BC}(A) = B'$, es decir $\tau_{BC} = \tau_{AB'}$
$\tau_{AB} \circ \tau_{BC} = \tau_{B'C} \circ \tau_{AB'} = \tau_{AC} = \tau_{BC} \circ \tau_{AC}$

- **Caso en que A, B y C están alineados:** • Es decir las traslaciones tienen guías paralelas. Preferimos hacer una demostración "algebraica" utilizando la conmutatividad de traslaciones con guías distintas.

Sea D un punto no alineado con A, B y C. Como $\tau_{BD} \circ \tau_{DB} = \text{id}$, se cumplirá:

$$\begin{aligned}
\tau_{AB} \circ \tau_{BC} &= \tau_{AB} \circ \tau_{BD} \circ \tau_{DB} \circ \tau_{BC} \\
&= \tau_{BD} \circ \tau_{AB} \circ \tau_{BC} \circ \tau_{DB} \\
&= \tau_{AD} \circ \tau_{DC} \\
&= \tau_{DC} \circ \tau_{AD} \\
&= \tau_{AC} \\
&= \tau_{BC} \circ \tau_{AB}
\end{aligned}$$

■

(d). *Si dos traslaciones son de guías paralelas, entonces o bien su composición es la identidad o bien esa composición tiene guías paralelas a las de las traslaciones a componer.*

Demostración. Es inmediato porque tener guías paralelas corresponde a que la misma familia de rectas paralelas es estable en ambas traslaciones. ■

(e). *Dos traslaciones, con guías de una paralelas o no paralelas a las guías de la otra, admitirán, una familia de planos estables: planos paralelos a las guías de ambas; en consecuencia la composición de ambas traslaciones también admitirá a esa familia de planos como estables y tendrá sus guías paralelas a esos planos.*

Demostración. Las traslaciones a componer se pueden expresar como τ_{AB} y τ_{BC}, con A, B y C no alineados. La composición será $\tau_{AC} = \tau_{BC} \circ \tau_{AB}$. El plano que contiene a A, B y C y todos los paralelos a él serán paralelos a las guías de las tres traslaciones, por lo que serán estables en las tres traslaciones. ■

Se suele resumir estas propiedades diciendo que las traslaciones, con la composición, forman un grupo conmutativo, que es un subgrupo del grupo de las t.r. A su vez las traslaciones de guías paralelas a una recta dada, junto con la identidad, también forman un grupo.Y lo mismo ocurre con las traslaciones de guías paralelas a un plano junto con la identidad. Si r es una recta y π un plano con $r \subset \pi$, entonces el grupo de traslaciones con guías paralelas a r es un subgrupo del grupo de traslaciones de guías paralelas a π y éste a su vez es un subgrupo del grupo de traslaciones con guías cualesquiera.

Aplicaciones

Definiciones.

- Se llama **paralelogramo** a cualquier cuadrilátero que tenga sus lados opuestos paralelos.
- Dadas dos rectas paralelas distintas a_o y b_o y una recta t secante con cada una de ellas respectivamente en A y B, si llamemos a y a' a las dos semirrectas de origen A incluidas en a_o; y b y b' a las dos semirrectas de origen B incluidas en b_o, con a y b del mismo sentido; $t_A = \overrightarrow{AB}$, t'_A a la semirrecta opuesta a ella; $t_B = \overrightarrow{BA}$ y t'_B a la semirrecta opuesta a ella, entonces se llaman:
  - **ángulos correspondientes** a los pares de ángulos:
  $$\widehat{at'_A} \text{ y } \widehat{bt_B} \qquad \widehat{a't'_A} \text{ y } \widehat{b't_B} \qquad \widehat{at_A} \text{ y } \widehat{bt'_B} \qquad \widehat{a't_A} \text{ y } \widehat{b't'_B}$$
  - **ángulos alternos internos** a los pares de ángulos
  $$\widehat{at_A} \text{ y } \widehat{b't_B} \qquad \widehat{a't_A} \text{ y } \widehat{bt_B}$$
  - **ángulos alternos externos** a los pares de ángulos
  $$\widehat{at'_A} \text{ y } \widehat{b't'_B} \qquad \widehat{a't'_A} \text{ y } \widehat{bt'_B}$$

Ejercicio 5.1.- Hacer una figura ilustrativa relativa a las rectas a_o, b_o y t, y a los ángulos resultantes de la definición anterior; y proponer alguna explicación acerca de los nombres elegidos.

Ejercicio 5.2.- Justificar:

- Si dos ángulos son correspondientes, entonces son congruentes.
- Si dos ángulos son alternos internos, entonces son congruentes.
- Si dos ángulos son alternos externos, entonces son congruentes.

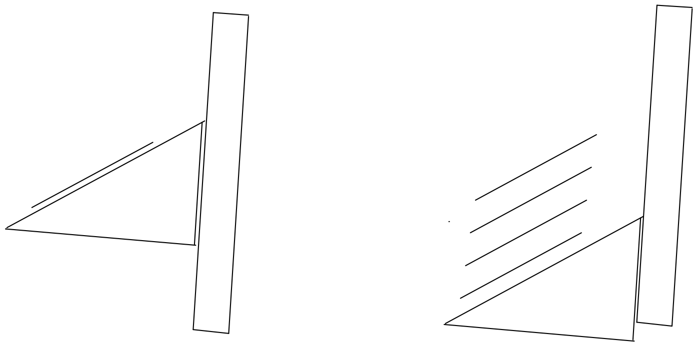
Ejercicio 5.3.- Demostrar:

Teorema. (Segundo teorema del ángulo exterior de un triángulo) *Para cualquier triángulo, un ángulo exterior es suma de los dos ángulos del triángulo no adyacentes a él; y los tres ángulos de un triángulo suman un llano.*

Ejercicio 5.4.- Demostrar que en todo paralelogramo,

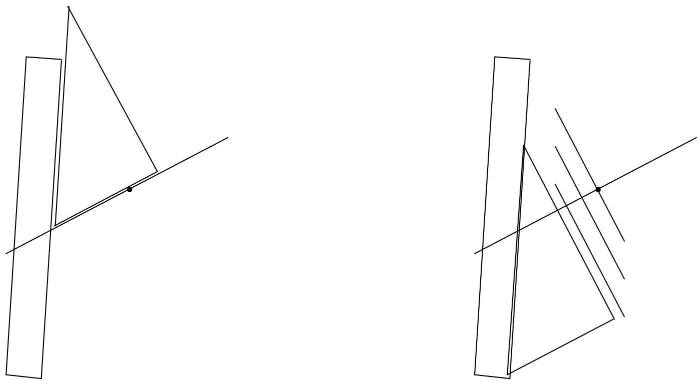
- *las diagonales se cortan en el punto medio* y recíprocamente, *si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en su punto medio, entonces es un paralelogramo.*
- *cada ángulo de un paralelogramo es congruente con su opuesto y es suplementario de cada uno de los otros dos.*

Las propiedades de las traslaciones justifican la utilización de una regla y una escuadra para dibujar rectas paralelas a una dada. (Aquí en realidad no se necesita utilizar el ángulo recto de la escuadra)



Posición inicial Se traslada la escuadra usando como guía la regla

También se puede usar una escuadra para trazar rectas perpendiculares con buena precisión en el punto de corte, sin que moleste la punta algo redondeada de la escuadra.



Posición inicial Se traslada la escuadra usando como guía la regla

6. Angulos orientados

Nos van a importar los ángulos no sólo como conjuntos de puntos sino que también vamos a considerar a uno de los lados como primero y al otro como segundo. Naturalmente sólo lo haremos en relación a ángulos no nulos ni llanos.

Si a y b son semirrectas no colineales de igual origen, $\widehat{ab} = \widehat{ba}$; pero el **ángulo orientado** $\widehat{ab}$ es distinto del **ángulo orientado** $\widehat{ba}$: son distintos en cuanto a cuál es el primer lado y cuál el segundo. El primer lado del **ángulo orientado** $\widehat{ab}$ es el a y el segundo es el b.

Angulo orientado $\widehat{ab}$ Angulo orientado $\widehat{ba}$

Como un par ordenado de semirrectas no colineales con igual origen nos sirven para dar una orientación al plano que las incluye, podremos hablar de **ángulo orientado positivamente** si corresponde a la orientación elegida para el plano (usualmente la antihoraria) y **ángulo orientado negativamente** en caso contrario.

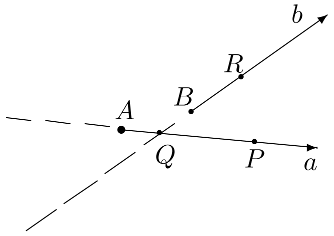
Si dos ángulos orientados coplanares son ambos positivamente orientados o ambos negativamente orientados, diremos que están **igualmente orientados** o que tienen **igual sentido**. En caso contrario diremos que están **contrariamente orientados** o que tienen **distinto sentido**, o **sentidos contrarios**. En particular el ángulo orientado $\widehat{ab}$ y el ángulo orientado $\widehat{ba}$ son congruentes pero de distinto sentido.

Sabemos que, por definición, dos ángulos son congruentes si son correspondientes en una t.r. Ahora, cuando dos ángulos de un plano π no nulos ni llanos, son congruentes, podremos preguntarnos si, como ángulos orientados, tienen igual o distinto sentido. Eso depende de que la t.r. que transforma uno en el otro, y que tiene al plano π como estable, preserve o cambie la orientación de π. Concretamente, en una t.r. directa en un plano π, a cualquier ángulo orientado de π le corresponde un ángulo orientado congruente y del mismo sentido; y si la t.r. es inversa, a cualquier ángulo orientado le corresponde un ángulo orientado y de distinto sentido.

7. Angulo determinado por dos semirrectas coplanares

Nos conviene asociar un ángulo a semirrectas de un mismo plano aunque no tengan igual origen.

Definiciones.



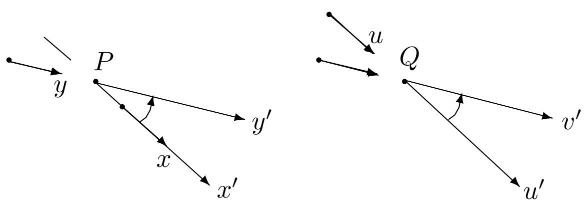
$\widehat{PQR}$ es el ángulo determinado por: las semirrectas a y b, con orígenes A y B respectivamente.

Dadas dos semirrectas coplanares no paralelas a y b cuyas correspondientes rectas son secantes en Q, se llama:

- **ángulo determinado por** a **y** b al ángulo formado por las semirrectas de origen Q colineales y de igual sentido respectivamente que a y b. Si las semirrectas a y b concurren en su origen, entonces se puede hablar del ángulo $\widehat{ab}$ como el ángulo <u>formado</u> por a y b y coincidirá con el ángulo <u>determinado</u> por a y b.

  En forma similar podemos hablar también de **ángulo orientado determinado por un par de semirrectas coplanares**.

Proposición. *Dos ángulos orientados determinados por semirrectas respectivamente paralelas y de igual sentido son congruentes y de igual sentido.*



Demostración. Sean x, y, u, v semirrectas de un plano π, con x e y no colineales, x y u paralelas y de igual sentido e y y v paralelas y de igual sentido.
Sea P el punto común a las rectas que incluyen a x y a y, y Q punto el común a las rectas que incluyen a u y a v.
Sean x' e y' los lados del ángulo determinado por x e y, es decir las semirrectas de origen P respectivamente colineales y paralelas a x e y.
Sean u' y v' los lados del ángulo determinado por u y v.
Se cumplirá que x' y u' son paralelas y de igual sentido y lo mismo para y y v'. Por lo tanto con la traslación τ_{PQ} tendremos

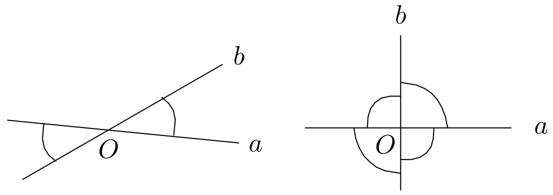
$$\tau_{PQ}(x') = u' \qquad \tau_{PQ}(y') = v'$$

Por lo tanto los ángulos orientados $\widehat{x'y'}$ y $\widehat{u'v'}$ serán congruentes y de igual sentido; pero esos son los ángulos orientados determinados por las semirrectas x e y, y por las semirrectas u y v. ∎

8. Angulos entre rectas

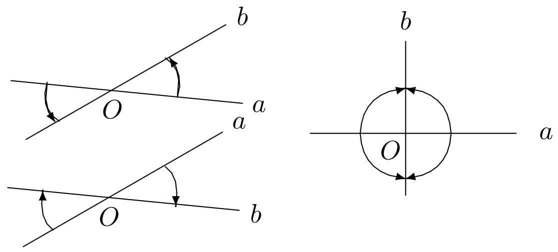
Dadas dos rectas distintas concurrentes en un punto O quedan determinadas cuatro semirrectas de origen O incluidas en las rectas. Dichas semirrectas, apareadas convenientemente, forman cuatro ángulos. Y sucede que o bien los cuatro ángulos son rectos, o bien hay dos agudos congruentes entre sí y dos obtusos también congruentes. Al hablar de ángulo entre rectas prestaremos atención a los ángulos rectos o a los agudos pero no a los obtusos.

Angulos (agudos o rectos) determinados por rectas a y b:



Los dos ángulos. Los cuatro ángulos.

Ang. (agudos o rectos) orientados determinados por rectas a y b, en ese orden:



Definiciones.

- Se llama **ángulo determinado por dos rectas secantes** a cualquiera de los ángulos no obtusos incluidos en la unión de las rectas.

Un ángulo orientado, determinado por rectas secantes que no sean perpendiculares, puede usarse para indicar una orientación para el plano que las incluye.

Capítulo VIII

Rotaciones. Circunferencia

1. Introducción

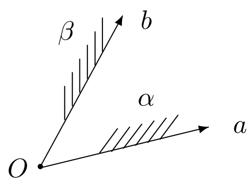
En las t.r. directas en un plano π, estudiadas hasta ahora (simetría central en π y traslaciones de guías paralelas a π), ocurre que a cada recta de π le corresponde una paralela. En cambio en la simetría axial, que es inversa en cualquier plano π que incluya al eje, cada recta de π y su correspondiente pueden ser paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos cosas. Con las rotaciones aparece la posibilidad, para una t.r. directa en un plano, de que no haya rectas correspondientes, en un plano estable, que sean paralelas. Y esto va a ser así para todas las rotaciones, con excepción de dos casos particulares de rotación, que llamaremos de ángulo nulo y de ángulo llano.

Pretendemos que las rotaciones, en un plano π, sean t.r. directas en π y que tengan un punto fijo. Entonces para describirlas dando un par semirrecta-semiplano nos convendrá partir de una semirrecta con origen en ese punto fijo.

2. Rotación

Definiciones.

- Una t.r. ρ se llama rotación si existe un par (a, α)—donde α es uno de los semiplanos cuyo borde incluye a la semirrecta a—, tal que el origen de a es un punto fijo en ρ, la semirrecta $\rho(a)$ está incluida en α y el semiplano opuesto del $\rho(\alpha)$ incluye a a.
- Sean a y b dos semirrectas distintas de un plano π, de igual origen O, no colineales. Sea α el semiplano de borde a que incluye a b y α' el semiplano opuesto al α. Sea β' el de borde b que incluye a a y β el semiplano opuesto al β'. se llama **rotación** en π de **centro** O y **ángulo orientado** $\widehat{ab}$, a la t.r. ρ en la que $\rho(a) = b$ y $\rho(\alpha) = \beta$. También puede decirse **giro** en lugar de rotación.



- Llamaremos también rotación, en el plano π, a la t.r. identidad: **rotación nula**, o **rotación identidad**, o rotación de centro cualquiera y ángulo nulo; y a cualquier simetría central en el plano π: **rotación de ángulo llano**, rotación en π de centro el centro de la simetría y ángulo llano.

Insistimos en que en ésta, como en cualquier otra t.r. definida por una semirrecta y su correspondiente y un semiplano α (de borde la semirrecta) y su correspondiente, para determinar la imagen de un punto del plano determinado por α, alcanza con aplicar adecuadamente el transporte de ángulos y/o de segmentos, y considerar rectas y planos perpendiculares. Pero el conocer propiedades de las rotaciones nos puede simplificar esa tarea.

De la definición surge que cualquier rotación en π es una t.r. directa en π, por lo que no puede coincidir con ninguna simetría axial en ese plano. Y si una rotación es de ángulo no nulo ni llano, como transforma a en b con $a \nparallel b$, esa rotación no puede coincidir ni con una simetría central ni con una traslación.

Estudiaremos ahora las propiedades de las rotaciones en π, de ángulos orientados no nulos ni llanos, fundamentalmente en lo que tiene que ver con los puntos del plano π; pero descubriremos además la existencia de toda una recta de puntos fijos, perpendicular a π, a la que llamaremos **eje de la rotación**.

Propiedades de la rotación que lleva a a b

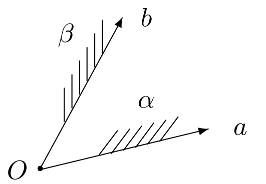
Sean a, b semirrectas de un plano π no colineales de origen común O, y a' y b' las semirrectas respectivamente opuestas. Sean $a_o = a \cup a'$ y $b_o = b \cup b'$. Sea α el semiplano de borde a que contiene a b y α' su opuesto. Sea β' el de borde b que incluye a a y β su opuesto. Sea ρ la rotación de centro O que lleva a a b. Es decir:

$$\rho(a) = b \qquad \rho(\alpha) = \beta$$

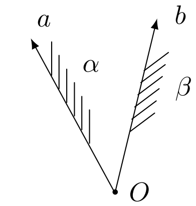
Se cumple:

(a). *π es estable en ρ.* Inmediato.

(b). *ρ preserva la orientación de π. En consecuencia ambos semiespacios de borde π son estables.* La orientación dada para π por la semirrecta a y el semiplano α es la misma que la orientación dada por b y β. Se reconoce fácilmente que es así por cuanto si nos imaginamos a una persona avanzando por el borde de α según el sentido de la semirrecta a, y a otra persona avanzando por el borde de β según el sentido de la semirrecta b entonces o bien ambas personas encuentran su semiplano α o β a la izquierda o ambas lo encuentran a la derecha.



α y β a izquierda



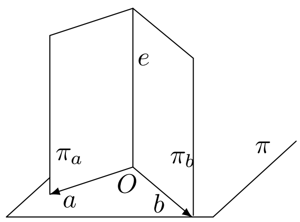
α y β a derecha

(c). *O es el único punto fijo del plano π.*

Demostración. Que O es fijo en ρ es inmediato. Veamos que es absurdo suponer que exista otro punto fijo en el plano π:.
Si hubiera un punto $X \in \pi$ fijo en ρ, con $X \neq O$, entonces todos los puntos alineados con O y X serían fijos. En particular $\overrightarrow{OX}$ sería estable. Si una semirrecta es estable en una t.r. directa de un plano π, a uno de los semiplanos de borde la semirrecta le corresponderá el mismo semiplano y entonces la t.r. coincidirá con la identidad. Pero ρ no es la identidad ya que $a \neq b = \rho(a)$. ∎

(d). *La recta e perpendicular a π tiene todos sus puntos fijos en ρ. Son los únicos puntos de Ω fijos en ρ.* A e se le llama eje de la rotación.

Demostración. Como la perpendicularidad entre rectas y planos es preservada por las t.r. (ver pág. 66), a e le tiene que corresponder una recta por O perpendicular a π. Es decir $\rho(e) = e$. Además como los semiespacios de borde π son estables, también serán estables las dos semirrectas de e de origen O. En consecuencia todos los puntos de e son fijos en ρ.



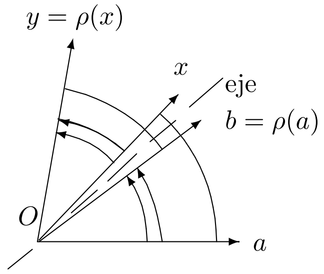
∎

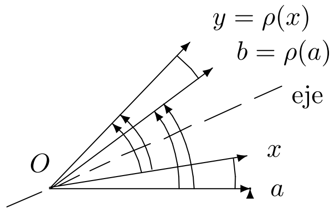
(e). *Dos puntos correspondientes por ρ equidistan del centro. Es decir, si $Q = \rho(P)$ entonces $\overline{OP} \equiv \overline{OQ}$.* Por tanto, *$O$ pertenece a la mediatriz de los segmentos cuyos extremos son correspondientes por ρ.* Inmediato.

(f). *Cualquier semirrecta x del plano π y su correspondiente y determinan un ángulo orientado congruente y del mismo sentido que el ángulo orientado $\widehat{ab}$.*

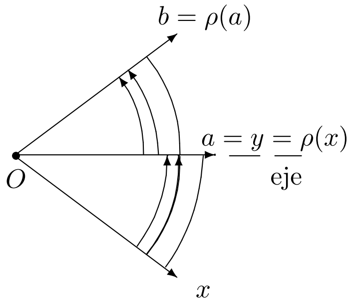
Demostración. Analizaremos varios casos.

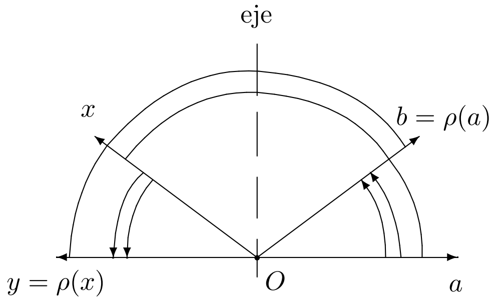
- x **y** a **colineales** • La demostración es inmediata. Se deja como ejercicio.
- x **y** a **no colineales con igual origen** O • Por ser ρ una t.r. directa en el plano π se cumplirá que los ángulos orientados $\widehat{ax}$ y su correspondiente por ρ, $\widehat{by}$, son congruentes y de igual sentido y por lo tanto los ángulos orientados $\widehat{ax}$ e $\widehat{yb}$ serán congruentes y de distinto sentido. Consideremos, como t.r. auxiliar, la t.r. inversa en π, σ, en la que $\sigma(a) = y$. σ resulta ser una simetría axial cuyo eje contiene a O:





- ∘ Si a e y no son colineales, el eje de σ contendrá a la bisectriz de $\widehat{ay}$.
- ∘ Si $a=y$, entonces el eje de σ contendrá a a.





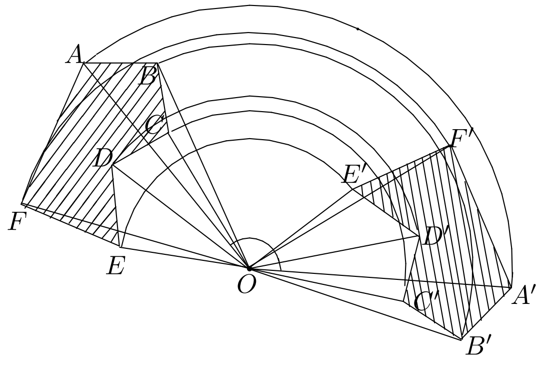
- ∘ Si a e y son opuestas, entonces el eje de σ será la recta por O perpendicular a a.

Pero en todos los casos, el ángulo orientado $\widehat{ab}$ se transformará, por la simetría axial σ, en un ángulo orientado congruente con él y de sentido contrario. Como $\sigma(a)=y$, deberá ocurrir $\sigma(b)=x$. Así que los ángulos orientados $\widehat{ab}$ y su imagen por σ, $\widehat{yx}$ son congruentes y de sentido contrario. Por lo tanto, los ángulos orientados $\widehat{ab}$ y $\widehat{xy}$ son congruentes y de igual sentido.

- x **con origen** $P \neq O$ • Sean u y v las semirrectas de origen O respectivamente paralelas y de igual sentido que x e y. (Se sugiere hacer una figura ilustrativa). Sabemos que u y v determinan un ángulo orientado congruente y de igual sentido que el determinado por x e y.
  Por ser $\rho(x)=y$, porque O es fijo en ρ, y porque las t.r. directas en un plano preservan el paralelismo y el ser del mismo sentido, resultará que $\rho(u)=v$. Entonces u y v están en las condiciones del caso anterior y se cumplirá que el ángulo orientado $\widehat{uv}$ es congruente y de igual sentido que el $\widehat{ab}$, por lo que también $\widehat{xy}$ es congruente y de igual sentido que el $\widehat{ab}$. ∎

Nota. Todo lo dicho en relación a puntos y rectas del plano π vale también en relación a cualquier otro plano perpendicular al eje de la rotación: para cualquier otro plano π' paralelo a π; el papel del punto O lo hará el punto O' común a π' y al eje.

La ilustración siguiente muestra dos figuras correspondientes en una rotación. Los puntos "especiales" de la figura, correspondientes, han sido unidos con arcos de circunferencias, todas de centro O, para resaltar que se cumple la propiedad (e). También se han marcado los segmentos que unen esos puntos con el centro para facilitar la verificación de la propiedad (f).



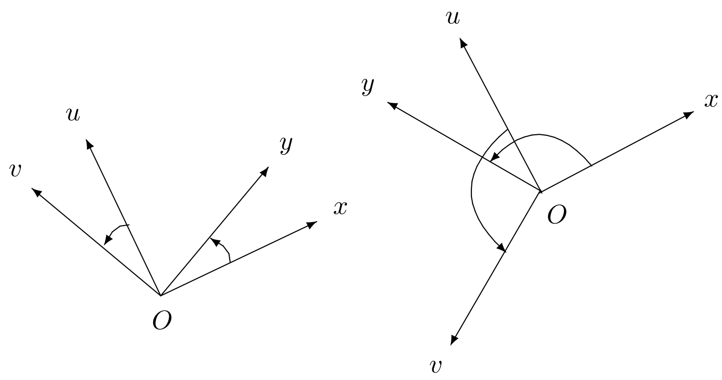
Figuras correspondientes en la rotación de centro O y ángulo orientado $\widehat{AOA'}$.

Proposición. *Si π es un plano estable en una t.r., entonces la t.r. es una rotación no nula en ese plano si y sólo si la t.r. tiene exactamente un punto de π fijo.*

Demostración. Es inmediato.
(Y si hay más de un punto de π fijo, siendo la t.r. directa en π, la t.r. será la identidad). ∎

Proposición. *Dos ángulos orientados y de igual sentido, determinados por semirrectas de un plano π respectivamente perpendiculares, son congruentes.*

Demostración.



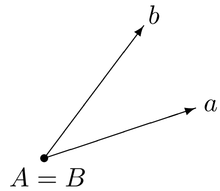
Es suficiente justificarlo para semirrectas con igual origen O. Sean $\widehat{xy}$ y $\widehat{uv}$ ángulos orientados en las condiciones de la hipótesis, es decir con $u \perp x$ y $v \perp y$.
Se cumple que la rotación de centro O que envía x a u (rotación de ángulo orientado recto) también envía y a v. ∎

Determinación del centro de una rotación

Proposición. *Dadas dos semirrectas de un plano π no paralelas a y b de orígenes A y B, existe exactamente una rotación en π que transforma a en b.*

Demostración. Por el axioma de las t.r. sabemos que dado un par de semirrectas y un par de semiplanos de borde esas semirrectas existe exactamente una t.r. que transforma semirrecta y semiplano en semirrecta y semiplano. Así que lo único a probar es que en las condiciones de los datos la t.r. es una rotación.

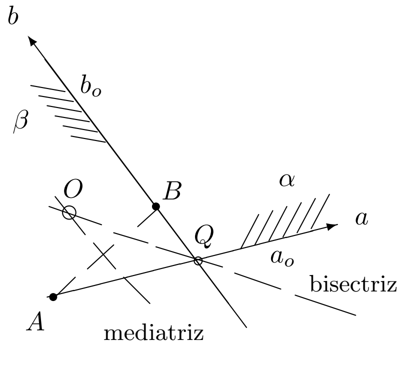
- Si $A = B$ la rotación de centro A que envía a a b cumple lo pedido.

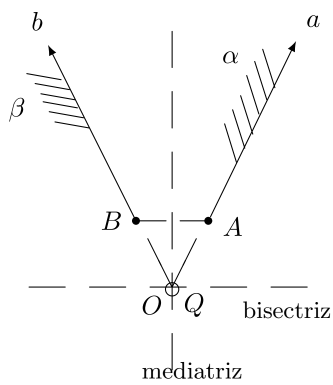


- Si $A \neq B$ entonces el posible centro O, al ser un punto fijo, debe equidistar de cualquier par de puntos correspondientes, en particular de A y B; es decir O debe pertenecer a la mediatriz de $\overline{AB}$.

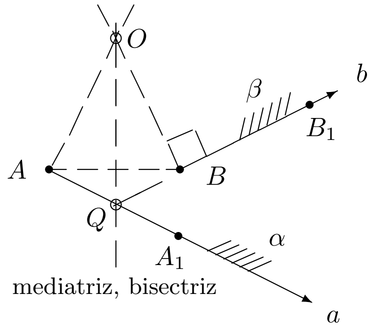
  Si encontramos otro par de correspondientes en la t.r. C y D, tales que la mediatriz de $\overline{CD}$ no sea paralela con la de $\overline{AB}$, entonces, el punto común a ambas mediatrices debe ser el centro. Pero preferimos poner de manifiesto otras propiedades.

  Sean a_o y b_o las rectas que incluyen a a y b, y sea $Q \in a_o \cap b_o$. El posible centro de la rotación debe equidistar también de las rectas a_o y de b_o, por lo que debe pertenecer a la bisectriz de alguno de los cuatro ángulos determinados por a_o y b_o. Llamemos $\overline{a}$ y $\overline{b}$ a las semirrectas de origen Q que forman el ángulo determinado por a y b; llamemos también α al semiplano de borde a_o que incluye a $\overline{b}$, α' a su opuesto, β' al semiplano de borde b_o que incluye a $\overline{a}$ y β a su opuesto. Como $\rho(\alpha) = \beta$ y $\rho(\alpha') = \beta'$ el posible punto fijo O debe estar en $\alpha \cap \beta$ o en $\alpha' \cap \beta'$; es decir, el posible centro debe pertenecer a alguno de los dos ángulos adyacentes al ángulo determinado por a y b: debe pertenecer a la recta que incluye a las bisectrices de los dos ángulos adyacentes a dicho ángulo.





- Si la recta mediatriz de $\overline{AB}$ y la recta que contiene a las bisectrices tienen exactamente un punto en común, O, entonces la rotación de centro O y que envía $\overrightarrow{OA}$ a la $\overrightarrow{OB}$ es la rotación buscada.
- Si la recta mediatriz y la que contiene las bisectrices son paralelas, eso se deberá a que las bisectrices son perpendiculares a $\overline{AB}$, es decir que el triángulo $\overset{\triangle}{AQB}$ es isósceles, por lo que esas rectas no sólo serán paralelas sino que también serán coincidentes.
  En este caso, podemos seguir poniendo en evidencia condiciones para determinar el centro.



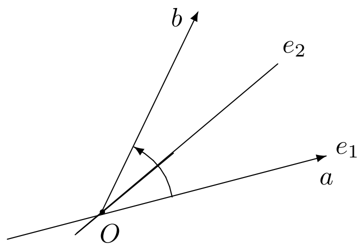
Consideremos puntos auxiliares: $A_1 \in a - \{A\}$ y $B_1 \in b - \{B\}$. El posible centro O debe ser tal que los ángulos $\widehat{OAA_1}$ y $\widehat{OBB_1}$ que serán correspondientes en el giro, sean congruentes. Entonces el único punto de la mediatriz que sirve como O es el punto común a las perpendiculares a a por A y a b por B. Con ese punto como O, los ángulos $\widehat{OAA_1}$ y $\widehat{OBB_1}$ son ambos rectos.
En cambio si se tomara cualquier otro punto de la mediatriz como O, uno de esos ángulos sería agudo y el otro sería obtuso.
Y efectivamente, con ese punto O, se cumple que la rotación de centro O que envía $\overrightarrow{OA}$ a $\overrightarrow{OB}$ también envía a a b.

∎

3. Expresión de rotación como composición de simetrías axiales de ejes secantes

Recordamos que una traslación que envía A a B se pude expresar como composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos, ambos perpendiculares a $\overline{AB}$ (ver pág. 76), el primer eje por A y el segundo por el punto medio de $\overline{AB}$. Como cualquier punto, junto con su imagen, nos sirve para describir a una traslación, tenemos infinitos modos de expresar a esa traslación como composición de dos simetrías axiales.

En forma similar, es inmediato que una rotación en π de centro O, se puede expresar como composición de dos simetrías axiales de ejes secantes en O. Si la rotación, envía la semirrecta a a la semirrecta b, ambas de origen O, entonces el primer eje puede ser la recta que incluye a a y el segundo la bisectriz del ángulo $\widehat{ab}$.



Como cualquier semirrecta del plano π, de origen O, junto con su imagen nos sirven para describir a la rotación, tenemos infinitos modos de expresar a esa rotación como composición de dos simetrías axiales.

Incluso podríamos tomar otro plano paralelo a π para trabajar en él ...; o independizarnos de π y mencionar sólo al eje de la rotación, e, perpendicular a π por O. Una rotación de eje e, se puede expresar como composición de dos simetrías axiales cuyos ejes, e_1 y e_2, son perpendiculares a e y con los tres ejes concurrentes.

4. Composición de rotaciones de igual eje. (Igual centro en el plano)

Todas las rotaciones de eje e son estables en cada uno de los planos perpendiculares a e. Y cada punto del espacio pertenece a alguno de esos planos estables. Entonces podemos concentrarnos en el estudio de las rotaciones en un plano π de igual centro.

Veremos que el subconjunto de las rotaciones, en un plano, de centro dado, tiene propiedades similares al subconjunto de las traslaciones: La composición de rotaciones de ese tipo es una rotación del mismo tipo; y esa composición es conmutativa.

Denotaremos ρ_{ab} a la t.r. (rotación) que envía la semirrecta a a la semirrecta b, donde a y b deben tener igual origen.

También denotaremos a la t.r. identidad con ρ_{hh}, donde h es una semirrecta cualquiera.

Propiedades

(a). *La composición de dos rotaciones en π y la inversa de una rotación en π son t.r. directas en π.* Es inmediato.

(b). *Para a y b de igual origen,*

$$(\rho_{ab})^{-1} = \rho_{ba}.$$

Es decir: *La inversa de una rotación en π de centro O y cierto ángulo orientado es también una rotación en π de centro O y ángulo orientado congruente al anterior pero de sentido contrario.* Es inmediato

(c). *La composición de dos rotaciones en π de igual centro es una rotación en π de igual centro; si la primera es de ángulo orientado $\widehat{ab}$ y la segunda de ángulo orientado $\widehat{bc}$, con a, b, c semirrectas de origen O la composición es una rotación de centro O y ángulo orientado $\widehat{ac}$. Es decir*

$$\rho_{bc} \circ \rho_{ab} = \rho_{ac}.$$

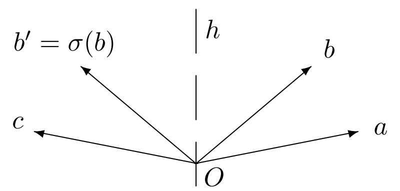
Si la semirrecta b es interior al ángulo $\widehat{ac}$, entonces el ángulo de giro de la composición, $\widehat{ac}$ es suma de los ángulos $\widehat{ab}$ y $\widehat{bc}$. Se deja como ejercicio.

(d). *La composición de dos rotaciones, en un mismo plano, de igual centro O es conmutativa.*

Demostración. Sean ρ_{ab} y ρ_{bc} las rotaciones en el plano π a componer, con a, b y c de origen O. Consideramos una t.r. auxiliar σ, inversa en π, que transforma a en c. σ será una simetría axial de eje h donde :

- h es la bisectriz de $\widehat{ac}$, si a y c no son colineales.
- h contiene a a, si $a = c$.
- h es perpendicular a la recta que contiene a a, si $a = c$.

(Sólo se ha ilustrado el caso en que a y c no son colineales)



Se cumple que $\sigma \circ \sigma = \text{id}$, por lo tanto, llamando $b' = \sigma(b)$:

$$\sigma(a) = c \quad \sigma(c) = a \quad \sigma(b) = b' \quad \sigma(b') = b$$

Entonces $\sigma(\widehat{ab}) = \widehat{cb'}$ por lo que los ángulos orientados $\widehat{ab}$ y $\widehat{cb'}$ son congruentes y de sentido contrario y lo mismo ocurre con los ángulos orientados $\widehat{bc}$ y $\widehat{b'a}$. Eso significa que los ángulos orientados $\widehat{ab}$ y $\widehat{b'c}$ son congruentes y de igual sentido y también lo son los ángulos orientados $\widehat{bc}$ y $\widehat{ab'}$. Entonces

$$\rho_{b'c} = \rho_{ab}, \quad \rho_{ab'} = \rho_{bc} \quad \text{y} \quad \rho_{bc} \circ \rho_{ab} = \rho_{ac} = \rho_{b'c} \circ \rho_{ab'} = \rho_{ab} \circ \rho_{bc}$$

∎

Es conveniente incorporar una **suma de ángulos orientados**, de modo que podamos decir que *el ángulo orientado de la composición de rotaciones es suma de los ángulos orientados de las rotaciones componentes*q. Para la suma de ángulos no orientados (ver pág. 55) la suma no siempre es posible; pero esos ángulos pueden ordenarse y cuando el ángulo suma existe, es mayor o igual que cualquiera de los sumandos. En cambio, para la suma de ángulos orientados, el ángulo suma siempre existe; pero no es posible definir un orden entre ángulos orientados que sea compatible con esa suma. (Admitimos ángulos orientados nulos y ángulos orientados llanos, aunque ninguno de esos ángulos sirva para dar una orientación al plano).

Nota. La composición de rotaciones, en π, de centros distintos (es decir, pensando en todo el espacio, rotaciones de ejes paralelos) no necesariamente es una rotación: Sí será una t.r. directa en π, pero puede ser una traslación o una rotación. Y tampoco puede asegurarse la conmutatividad de estas composiciones. Para analizarlas, suele ser útil expresar las rotaciones como composición de simetrías axiales adecuadas. (Ver pág. 89).

5. Transformaciones rígidas con un punto fijo

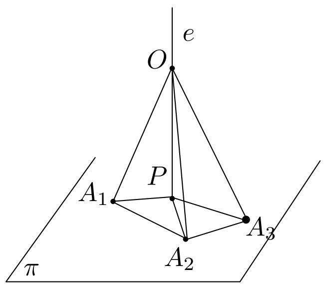
Reiteramos que las transformaciones que llamamos t.r. en este curso preservan la orientación del espacio; y que permitimos que preserven o no la orientación del espacio a las transformaciones pseudo rígidas.

Una t.r. ρ es una rotación no nula, en cierto plano π, si y sólo si ρ es directa en π y hay exactamente un punto de π que es fijo en ρ. Esta propiedad admite una generalización interesante. Veamos primeramente un lema.

Lema. *Si O es un punto fijo en una t.r. ρ, entonces existe un plano π que es estable en ρ y un punto P de π que es fijo en ρ.*

Demostración. Sean H y K dos puntos no alineados con O, $H' = \rho(H)$ y $K' = \rho(K)$.

- **Si H, H', K, K' y O son coplanares •** , en π entonces el plano π es estable en ρ. π y $P = O$ son el plano y el punto buscados.
- **Si H, H', K, K' y O no son coplanares •** , seguramente o bien H y H' no están alineados con O o bien K y K' no están alineados con O. Renombremos A_1 a H o a K de modo de poder asegurar que A_1 y $A_2 = \rho(A_1)$ no están alineados con O. Sea $A_3 = \rho(A_2)$. Como $A_1 \neq A_2$ también será $A_2 \neq A_3$
  - **Si A_1, A_2 A_3 y O son coplanares •** , en π, entonces π es estable en ρ. π y $P = O$ son los buscados.
  - **Si A_1, A_2, y A_3 y O no son coplanares •** , seguramente A_1, A_2 y A_3 son distintos dos a dos y no alineados. Sea π el plano determinado por A_1, A_2 y A_3, y P el pie de la perpendicular desde O a π. Mostraremos que ρ coincide con la rotación ρ', en π, que envía la semirrecta $\overrightarrow{PA_1}$ a la $\overrightarrow{PA_2}$ por lo que resultará π estable en ρ y P fijo en ρ.



$\rho(O) = O$, $A_2 = \rho(A_1)$, $A_3 = \rho(A_2)$
$A_1, A_2, A_3 \in \pi$
$e = \overleftrightarrow{OP} \perp \pi$
e es el eje de la rotación ρ.

Por ser O fijo en ρ, y A_2, A_3 imágenes respectivas de A_1 y A_2,

$$\overline{OA_1} \equiv \overline{OA_2} \equiv \overline{OA_3}$$

y

$$\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3}.$$

Entonces,

$$O\overset{\triangle}{P}A_1 \equiv O\overset{\triangle}{P}A_2 \equiv O\overset{\triangle}{P}A_3,$$

ya que son triángulos rectángulos que comparten un cateto y tienen hipotenusas congruentes. En particular,

$$\overline{PA_1} \equiv \overline{PA_2} \equiv \overline{PA_3}.$$

Ahora, por el caso L-L-L de congruencia de triángulos

$$A_1\overset{\triangle}{P}A_2 \equiv A_2\overset{\triangle}{P}A_3,$$

por lo que

$$\widehat{A_1PA_2} \equiv \widehat{A_2PA_3}.$$

Como además $A_1 \neq A_3$, seguro que A_3 pertenece al semiplano de π de borde $\overleftrightarrow{PA_2}$ que no contiene a A_1.
En consecuencia, llamando ρ' a la rotación que envía $\overrightarrow{PA_1}$ a $\overrightarrow{PA_2}$, se cumplirá:

$$\rho'(A_1) = A_2, \quad \rho'(A_2) = A_3, \quad \rho'(P) = P, \quad \rho'(O) = O.$$

La última igualdad porque $O \in p$; y la recta p, al ser perpendicular a π por P tiene todos sus puntos fijos en ρ'.
Así que las t.r. ρ y ρ' actúan del mismo modo sobre tres puntos no alineados, O, A_1 y A_2 con lo cual actúan del mismo modo sobre la semirrecta $\overrightarrow{OA_1}$ y sobre el semiplano de borde $\overleftrightarrow{OA_1}$ que contiene a A_2. Es decir $\rho = \rho'$. ∎

Teorema. (T.r. con un punto fijo) *Si una t.r. ρ tiene al menos un punto fijo O, entonces es una rotación cuyo eje pasa por O. (Se incluye aquí el caso de la identidad, rotación nula).*

Demostración. Si ρ es la identidad, el teorema se cumple trivialmente. Así que supondremos ρ distinto de la identidad.
Por el lema existirá un plano π estable en ρ y un punto P de π que es fijo en ρ.

- **Si ρ es directa en π:** • ρ es una rotación en π de centro O, distinta de la rotación nula, por lo que la recta e perpendicular a π por O, es el eje de la rotación. Los puntos de e son los únicos fijos en ρ. ρ es una rotación de eje e y ángulo no nulo.
  - **Si ρ es inversa en π:** • ρ es una simetría axial cuyo eje e pasa por O y está incluido en π. Los puntos de e son los únicos fijos en ρ. ρ es una rotación de eje e y ángulo llano. ∎

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos:

Corolario. *La composición de dos rotaciones de ejes secantes en O es una rotación cuyo eje también pasa por O.*

6. Circunferencia

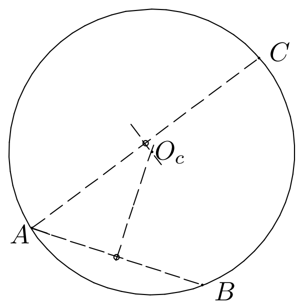
Definiciones. Sea π un plano

- Dado un punto O de π y un segmento $\overline{AB}$, se llama **circunferencia de centro O y radio $\overline{AB}$** al lugar geométrico de los puntos P (conjunto de puntos P) del plano π tales que $\overline{OP} \equiv \overline{AB}$.
  Otras definiciones concordantes con esta: (Se deja como ejercicio verificar que lo son).
- Dado dos puntos distintos O y Q de π se llama **circunferencia de centro O que pasa por Q** al conjunto de puntos P de π tales que $\overline{OP} \equiv \overline{OQ}$.
- Se dice que un conjunto de puntos de un plano π es una **circunferencia** si existe un punto O de π tal que el conjunto está formado por todos los puntos de π que equidistan de O.
  - Al punto O se le llama centro de la circunferencia.
  - A cualquiera de los segmentos $\overline{OP}$ se le llama **radio de la circunferencia**.

Si en las definiciones anteriores no se limitan los puntos a pertenecer a un plano, se obtienen definiciones para la **esfera de centro O** .

Teorema. *Tres puntos no alineados determinan una circunferencia: la única que contiene a los tres puntos.*

Demostración.



Sean A, B y C los tres puntos no alineados, y π el único plano que los contiene.

- Si una circunferencia de centro O contiene a los puntos distintos A, B y C ocurrirá que O equidista de A, B y C, por lo que O deberá pertenecer a las mediatrices, en el plano π, de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
- Las mediatrices, en π, de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son rectas coplanares no paralelas (si lo fueran llegaríamos a un absurdo: tendríamos $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ y con el punto A común, por lo que esas rectas coincidirían y los tres puntos A, B y C estarían alineados); por lo tanto, esas mediatrices serán concurrentes en un punto; llamemos O a tal punto. O será el único centro posible para la circunferencia buscada. Es decir que no puede haber más de una circunferencia en las condiciones pedidas.
- O equidista de A y B por pertenecer a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, y también equidista de A y C por pertenecer a la mediatriz del segmento $\overline{AC}$. Por lo tanto O equidista de A, B y C así que la circunferencia de centro O que pasa por A, también pasará por B y C y es por lo tanto la circunferencia buscada. ∎

Teorema. No existe ninguna circunferencia que contenga a tres puntos distintos alineados.

Demostración. Sean A, B y C tres puntos, distintos dos a dos, pertenecientes a una recta r.

- Repitiendo el argumento utilizado en el teorema anterior, si existiera una circunferencia en las condiciones pedidas:

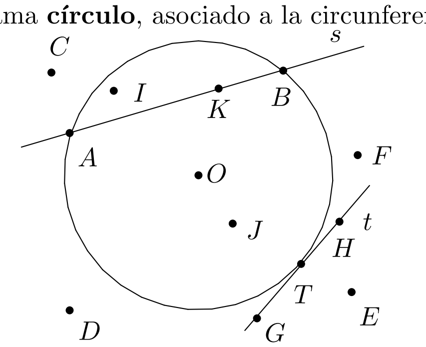
  su centro O, junto con r estarán incluidos en un plano π. O debería pertenecer a los planos mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; pero esos planos mediatrices serían perpendiculares a r por los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ (puntos medios distintos porque de otro modo sería $A = C$) por lo que resultarían paralelos y distintos, en contradicción con que O pertenecía a su intersección. ∎

Como consecuencia inmediata de lo anterior,

Corolario. *La intersección de una circunferencia y una recta no puede contener más de dos puntos.*

Definiciones.

- Dada, en un plano π una circunferencia de centro O y radio $\overline{OP}$,
  - se llama **interior de la circunferencia** al conjunto de puntos $Q \in \pi$ tales que $\overline{OQ} < \overline{OP}$. Se llama **exterior de la circunferencia** al conjunto de puntos $Q \in \pi$ tales que $\overline{OQ} > \overline{OP}$.
  - se llama **círculo**, asociado a la circunferencia dada, a la unión de la circunferencia con su interior.



$\mathcal{C}$: circunferencia de centro O que pasa por A
$A, B, T \in \mathcal{C}$
O, I, J, K interiores de $\mathcal{C}$
C, D, E, F, G exteriores a $\mathcal{C}$
s secante a $\mathcal{C}$
t tangente a $\mathcal{C}$; T punto de contacto entre t y $\mathcal{C}$
$\overline{GH}$ tangente a $\mathcal{C}$ en T

- Dados en un plano π, una circunferencia $\mathcal{C}$, una recta r y un punto T, que cumplen

$$r \cap \mathcal{C} = \{T\},$$

  hablaremos de **recta y circunferencia tangentes**. Se dice que:
  - r **y** $\mathcal{C}$ **son tangentes**.
  - r **y** $\mathcal{C}$ **son tangentes en** T.
  - r **es tangente a** $\mathcal{C}$.
  - r **es tangente a** $\mathcal{C}$ **en** T, o bien r **es tangente en** T **a** $\mathcal{C}$.
  - $\mathcal{C}$ **es tangente a** r.
  - $\mathcal{C}$ **es tangente a** r **en** T, o bien $\mathcal{C}$ **es tangente en** T **a** r.
  - $\overline{TG}$ **es tangente a** $\mathcal{C}$ **en** T.
  - T es el **punto de contacto** entre r y $\mathcal{C}$.
- Una semirrecta coplanar con una circunferencia se dice que es **tangente a una circunferencia** si la recta correspondiente es tangente a la circunferencia y si además el punto de contacto pertenece a la semirrecta.
- Si todos los puntos de una recta coplanar con una circunferencia son exteriores a ella, se dice que la recta es **exterior a la circunferencia**.

- Si una recta contiene exactamente dos puntos de una circunferencia entonces la recta se dice **secante a la circunferencia**.
- Un segmento se dice **tangente a una circunferencia** si la recta que incluye al segmento es tangente a la circunferencia, y el punto de contacto pertenece al segmento.

Nota. Aun no hemos justificado, porque todavía nos falta un axioma para poder hacerlo, que si una recta, coplanar con una circunferencia no es ni tangente ni exterior entonces es secante.

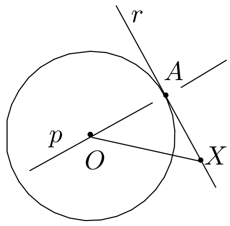
Es sencillo justificar que:

Proposición. *El interior de la circunferencia y el círculo son conjuntos convexos.*

7. Intersección de rectas y circunferencias

Proposición. *Dados, en un plano π, una circunferencia de centro O, un punto de la misma A $(A \neq O)$ y una recta r que pasa por A entonces, r y $\mathcal{C}$ son tangentes si y sólo si r es perpendicular a $\overleftrightarrow{OA}$.*

Demostración.



Sea p la recta perpendicular a r que pasa por O. Veremos que si y sólo si $A \in p$, resulta r tangente a $\mathcal{C}$.
Sea σ la simetría axial de eje p y $A' = \sigma(A)$.
p tiene todos sus puntos fijos en σ por lo que $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$, y $A' \in \mathcal{C}$.
Además r es estable en σ, por lo que $A' \in r$.
Entonces también $A' \in \mathcal{C} \cap r$.

- Si r es tangente en A a $\mathcal{C}$, deberá ocurrir $\mathcal{C} \cap r = \{A\}$, y por lo tanto $A' = A$. Así que A es fijo en σ por lo que A debe pertenecer al eje p.
- Si $\overleftrightarrow{OA} = p$, entonces con cualquier punto X de r, distinto de A, completamos un triángulo rectángulo en A: $O\overset{\triangle}{A}X$. En ese triángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos; en particular es mayor que el radio de la circunferencia. así que X es un punto exterior a la circunferencia; por ello A es el único punto común a la circunferencia y a la recta, es decir r es tangente a la circunferencia. ∎

Como consecuencia inmediata tenemos:

Corolario. *Todos los puntos de una recta tangente a una circunferencia, con excepción del punto de contacto, son exteriores a la misma.*

Proposición. *Dadas en un plano π, una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y una recta r que pasa por O, entonces la recta es secante a la circunferencia.*

Demostración. (Se sugiere hacer una figura ilustrativa) Consideramos dos puntos A y B que cumplan: $A \in \mathcal{C}$ y $B \in r$ con $B \neq O$. Sea ρ la t.r. directa, en π, que transforma $\overrightarrow{OA}$ en $\overrightarrow{OB}$ (será una rotación de centro O, pero no necesitamos prestar atención a ello). Sea σ la simetría central, en π, de centro O. Sea $R_1 = \rho(A)$ y $R_2 = \sigma(R_1)$. Se deja como ejercicio justificar que R_1 y R_2 son dos puntos distintos y que $\mathcal{C} \cap r = \{R_1, R_2\}$. ∎

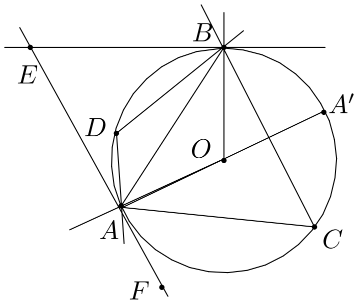
Nota. Si en la proposición anterior cambiamos "que la recta pasa por O" por "que la recta pasa por un punto interior a $\mathcal{C}$" obtenemos una proposición que no podemos justificar en base a los axiomas aceptados. Estamos en condiciones de probar, aunque no lo haremos, que si una recta es secante a una circunferencia, con puntos comunes A y B entonces todos los puntos del segmento abierto $\overset{\circ\!\!-\!\!\circ}{AB}$ son interiores a la circunferencia y los puntos de las semirrectas abiertas opuestas a la $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{AB}$ y $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{BA}$ son todos exteriores. Y que si una recta tiene algún punto en común con la circunferencia entonces o bien es tangente o bien tiene exactamente dos puntos en común con la circunferencia. Por otro lado, podemos probar que si una recta del plano de la circunferencia, tiene un punto interior a una circunferencia entonces tiene otros interiores y también tiene puntos exteriores a la misma; aunque la intuición nos dice que también hay exactamente dos puntos de la circunferencia, los axiomas que hemos aceptado no nos permiten demostrarlo. Es decir no estamos en condiciones de probar que cualquier recta del plano de una circunferencia con un punto interior a la misma, la corta en dos puntos. Cuando hayamos incorporado el axioma de continuidad, sí podremos hacerlo.

8. Arcos, Cuerdas, Polígonos inscriptos y circunscriptos

Angulos, arcos y cuerdas

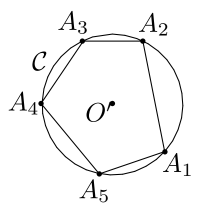
Definiciones. Dada una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O de un plano π:

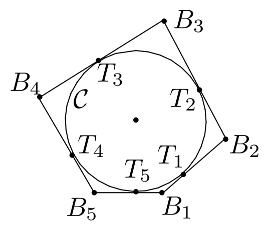
- Se llama **ángulo central de** $\mathcal{C}$, a cualquier ángulo del plano π con vértice en el centro de $\mathcal{C}$.



Un arco de extremos A y B contiene a C; el otro no contiene a C.
$\overline{AB}$, $\overline{AA'}$: cuerdas. $\overline{AA'}$: diámetro.
$\widehat{AOB}$: central.
$\widehat{ACB}$, $\widehat{ACD}$: inscriptos.
$\widehat{AEB}$: circunscripto.
$\widehat{BAE}$, $\widehat{BAF}$: semiinscriptos.

- Se llama **ángulo inscripto** en una circunferencia $\mathcal{C}$, a cualquier ángulo cuyo vértice pertenezca a $\mathcal{C}$ y tal que las rectas que incluyen a los lados sean secantes a la misma.
- Se llama **ángulo semiinscripto** a una circunferencia $\mathcal{C}$, a cualquier ángulo que tenga su vértice perteneciente a $\mathcal{C}$, que la recta que contiene a uno de los lados sea secante y que el otro lado sea tangente a $\mathcal{C}$.
- Se llama **ángulo circunscripto** a una circunferencia $\mathcal{C}$, a cualquier ángulo cuyos lados sean semirrectas tangentes a $\mathcal{C}$.
- Dados A y B ($A \neq B$) pertenecientes a $\mathcal{C}$,
    - se llama **cuerda de** $\mathcal{C}$ determinada por A y B, al segmento $\overline{AB}$. Si una cuerda pasa por el centro de $\mathcal{C}$ entonces también se llama **diámetro de** $\mathcal{C}$. Luego de introducir la medida de segmentos, y dependiendo del contexto, usaremos **cuerda** y **diámetro** para referirnos tanto a los segmentos como a las medidas de esos segmentos.
    - se llama **arco de** $\mathcal{C}$, de extremos A y B, a cualquiera de las intersecciones de $\mathcal{C}$ con uno de los dos semiplanos de π de borde $\overleftrightarrow{AB}$.
- Dados A y B ($A \neq B$) pertenecientes a $\mathcal{C}$, y no alineados con el centro O de $\mathcal{C}$,
    - se llama **arco principal** de extremos A y B, al arco de $\mathcal{C}$ incluido en el semiplano de borde $\overleftrightarrow{AB}$ opuesto al que contiene a O.
    - se llama **arco correspondiente al ángulo central** $\widehat{AOB}$, al arco principal de extremos A y B.
    - se llama **sector circular**, correspondiente a la cuerda $\overline{AB}$, a la intersección del sector angular del ángulo central $\widehat{AOB}$ con el círculo correspondiente a $\mathcal{C}$.
    - y si $V \in \mathcal{C}$, asociamos al ángulo $\widehat{AVB}$ con el arco principal de extremos A y B (arco en el semiplano opuesto al de borde $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a V).
    - y si A y B son los puntos de tangencia de dos tangentes a $\mathcal{C}$ que se cortan en E, asociamos al ángulo circunscripto $\widehat{AEB}$ con el arco principal de extremos A y B.
- Un polígono (convexo) está **inscripto en** $\mathcal{C}$ si todos sus vértices pertenecen a $\mathcal{C}$. (Todos los ángulos del polígono resultan inscriptos). En esas condiciones también se dice que la **circunferencia está circunscripta al polígono**





- Un polígono (convexo) está **circunscripto** a $\mathcal{C}$ si todos sus lados son tangentes a $\mathcal{C}$. (Todos sus ángulos son circunscriptos). En esas condiciones también se dice que la **circunferencia está inscripta en el polígono**
- Un polígono (convexo) se dice **inscribible** en una circunferencia, si existe alguna circunferencia que contenga a todos sus vértices.
- Un polígono (convexo) se dice **circunscribible** en una circunferencia si existe alguna circunferencia tangente a todos sus lados.

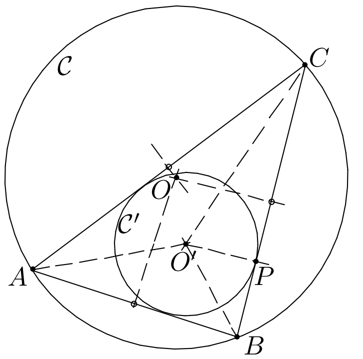
No todos los polígonos son inscribibles en una circunferencia. Por ejemplo, el polígono de la figura anterior de vértices A_1, A_2, …, A_5 es inscribible; pero si se cambia A_5 por el punto medio del segmento $\overline{A_4A_5}$ se obtiene un polígono no inscribible.

Sin embargo todos los triángulos son inscribibles y también circunscribibles:

Teorema. *Dado un triángulo cualquiera existe una circunferencia $\mathcal{C}$ y otra circunferencia $\mathcal{C}'$ tales que el triángulo está inscripto en $\mathcal{C}$ y circunscripto en $\mathcal{C}'$.*

Demostración. Es fácil justificar que:

- las mediatrices de los tres lados del triángulo se cortan en un punto, llamémosle O, que equidista de los tres vértices. O es centro de la circunferencia $\mathcal{C}$ en la que está inscripto el triángulo; y que llamamos circunferencia circunscripta al triángulo.
- las bisectrices de los tres lados del triángulo se cortan en un punto, llamémosle O', que equidista de los tres lados del triángulo. Si P es el pie de la perpendicular desde O' a $\overline{BC}$ entonces la circunferencia $\mathcal{C}'$ de centro O' y que pasa por P es la circunferencia inscripta en el triángulo.

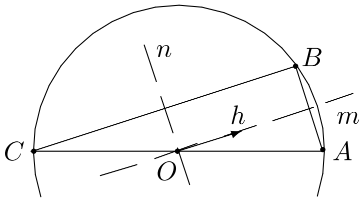


O, centro de la circunferencia $\mathcal{C}$ circunscripta al triángulo, radio $\overline{OA}$
O', centro de la circunferencia $\mathcal{C}'$ inscripta al triángulo, radio $\overline{O'P}$

∎

Teorema. (Del arco capaz de un recto) *La circunferencia que tiene por diámetro la hipotenusa de un triángulo rectángulo pasa por el vértice del ángulo recto. Recíprocamente, cualquier ángulo $\widehat{ABC}$, inscripto en una circunferencia de diámetro $\overline{AC}$, es recto.*

Demostración.



A, B y C no alineados.
m, n: mediatrices de $\overline{AB}$ y de $\overline{BC}$
$O = m \cap n$; h: semirrecta de origen O, $h \subset m$
$\mathcal{C}$: circunferencia de centro O que contiene a A, B y C.
σ_m y σ_n simetrias axiales, en π, de ejes m y n respectivamente.
$\sigma_n \circ \sigma_m(A) = \sigma_n(\sigma_m(A)) = \sigma_n(B) = C$

- **Si $\widehat{ABC}$ es recto:** • las mediatrices m y n resultan perpendiculares por lo que la composición de las dos simetrías de ejes m y n es una simetría central, en π, de centro el punto O común a ambas mediatrices. O es el centro de la circunferencia $\mathcal{C}$ circunscripta al triángulo. Pero

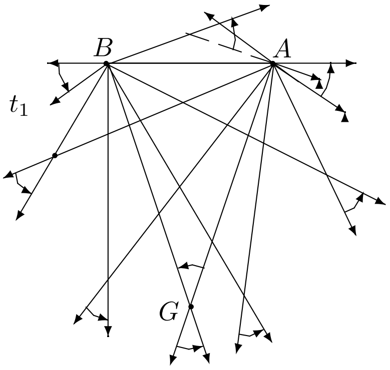
$$\sigma_n \circ \sigma_n(A) = \sigma_n(\sigma_n(A)) = \sigma_n(B) = C,$$

por lo que $O \in \overline{AC}$, es decir $\overline{AC}$ es un diámetro de $\mathcal{C}$.

- **Si $\overline{AC}$ es diámetro de $\mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$:** • entonces la composición $\nu = \sigma_n \circ \sigma_m$, que es una t.r. directa en el plano π tiene a O como punto fijo y envía A a C con O punto medio del segmento $\overline{AC}$. Entonces ν debe ser una simetría central, por lo que m y n deben ser perpendiculares y también $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$. ∎

El teorema anterior se podría enunciar como: *El lugar geométrico de los puntos B de un plano desde los que se "ve" un segmento $\overline{AC}$ bajo un ángulo recto es la circunferencia de diámetro $\overline{AC}$, de la que hay que excluir a los puntos A y C.*

Veremos a continuación, que un resultado parecido se obtiene con ángulos no rectos. Sea ρ una rotación, en un plano π, de centro G y sean A y B dos puntos distintos del G con $\rho(A) = B$. Ya sabemos que los ángulos determinados por pares de semirrectas de π correspondientes en ρ son todos congruentes y del mismo sentido que el ángulo de rotación. La figura siguiente ilustra esa situación. Podemos preguntarnos cuál es el lugar geométrico de los vértices de esos ángulos. A ese lugar pertenecen ciertamente los puntos G, A y B ¿Será una circunferencia?. La figura no lo desmiente … y podemos probar que la respuesta es "sí".

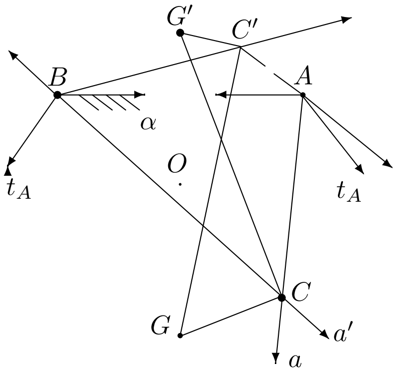


Angulos orientados determinados por pares de semirrectas, con orígenes en A y B, correspondientes en la rotación de centro G que envía $\overrightarrow{GA}$ a $\overrightarrow{GB}$.

Proposición. *El lugar geométrico de los puntos de un plano π que son vértices de los ángulos determinado por semirrectas de origen A y B correspondientes en una rotación, en π, de centro G, (A, B y G no alineados) es la circunferencia que pasa por A, B y G.*

Demostración. Sea ρ la rotación de la que habla el teorema, G el centro de ρ, α el semiplano de borde la recta $r = \overleftrightarrow{AB}$ que contiene a G y α' el semiplano opuesto.

- Si $\rho(\overrightarrow{GA}) = \overrightarrow{GB}$, como además $\rho(G) = G$ ocurrirá que también $\rho(\overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{BG}$. Es decir, el centro de la rotación pertenece al lugar.
- $\rho(\overrightarrow{AB})$ será alguna semirrecta de origen B, por lo que B será el vértice del ángulo determinado por ambas. Así que B pertenece al lugar. Y en forma similar se justifica que A pertenece al lugar.



- Todos los puntos $C \in \alpha - r$ y $C' \in \alpha' - r$ son tales que los ángulos determinados por las semirrectas $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$, en ese orden, tienen la misma orientación; (en la figura todos están orientados positivamente, en el sentido contrario al de las agujas del reloj); y los ángulos determinados por las semirrectas $\overrightarrow{AC'}$ y $\overrightarrow{BC'}$, en ese orden, tienen también la misma orientación entre ellos pero contraria a la anterior (en la figura todos están orientados negativamente);
- Sea C perteneciente a α y al lugar. Deberá ocurrir que $\rho(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BC}$.
- Sea C' perteneciente a α' y al lugar. Ocurrirá que $\rho(\overrightarrow{AC'})$ es la semirrecta opuesta de la $\overrightarrow{BC}$.
- Por lo estudiado en la sección de determinación del centro de una rotación, pág. 88, la recta $\overleftrightarrow{CG}$ contiene a las bisectrices de los ángulos adyacentes al $\widehat{ACB}$. También la recta $\overleftrightarrow{C'G}$ contiene a las bisectrices de los ángulos $\widehat{AC'B}$ y de su opuesto por el vértice.
- Llamemos ρ' a una t.r auxiliar muy relacionada con la dada:

$$\rho' = \sigma \circ \rho,$$

  rotación, en π, de centro G' donde σ es la simetría, en π, de centro B. Es decir que si a es una semirrecta de origen a, $a' = \rho(a)$ y $a'' = \rho'(a)$, entonces a' y a'' son semirrectas de origen B opuestas una de la otra. Como ρ' es una t.r. directa en π y las semirrectas correspondientes no son paralelas resultará que ρ' es también una rotación en π. Llamemos G' a su centro. Se cumplirá que la recta $\overleftrightarrow{G'C}$ incluye a las bisectrices de $\widehat{ACB}$ y de su opuesto por el vértice. Y también la recta $\overleftrightarrow{G'C'}$ incluye a las bisectrices de los ángulos adyacentes al $\widehat{AC'B}$.
- Como las rectas $\overleftrightarrow{GC}$ y $\overleftrightarrow{G'C}$ incluyen, respectivamente, a las bisectrices de dos ángulos adyacentes, deben ser perpendiculares. Y algo similar ocurre con las rectas $\overleftrightarrow{GC'}$ y $\overleftrightarrow{G'C'}$.
- En resumen, tanto los ángulos $\widehat{GCG'}$ como los ángulos $\widehat{GC'G'}$ son rectos.

- Entonces podemos asegurar, por el teorema anterior, que todos los puntos C y todos los puntos C' pertenecen a la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$. ∎

Proposición. *Dados tres puntos A, B y G no alineados de un plano π, con G equidistante de A y B, existe exactamente otro punto $G' \neq G$, tal que si ρ es la rotación en π, ρ de centro G que transforma A en B y ρ' es la rotación en π, ρ' de centro G' que transforma A en B entonces ρ y ρ' cumplen:*

(a). si a_o es una recta cualquiera que pasa por A:

$$\rho(a_o) = \rho'(a_o).$$

(b). $\widehat{GAG'}$ y $\widehat{GBG'}$ son rectos.

(c). los ángulos orientados de la rotación ρ y de la rotación ρ' son suplementarios y contrariamente orientados.

(d). La circunferencia de diámetro $\overline{GG'}$ contiene a A y B.

Demostración. Proponemos como ρ' la composición $\rho' = \sigma \circ \rho$, donde σ es la simetría central en π, de centro B.

- **(a)** • Si a_o pasa por A, como $\rho(A) = B$, $\rho(a_o)$ pasará por B. Sabemos que en σ cualquier recta de π que pase por B es estable, así que

$$\rho'(a_o) = \sigma \circ \rho(a_o) = \sigma(\rho(a_o)) = \rho(a_o).$$

- **(b)** • Si a es una de las semirrectas de origen A incluidas en a_o, $b = \rho(a)$, y b' es la semirrecta opuesta de b (b y b' con origen B), tendremos:

$$\rho'(a) = \sigma \circ \rho(a) = \sigma(b) = b'.$$

  Los pares de semirrectas de π correspondientes en una rotación determinan el ángulo orientado de giro. Los ángulos orientado determinados por el par (a, b) y por el par (a, b') son suplementarios y contrariamente orientados.

- **(c)** • El ángulo orientado de giro para ρ también lo tenemos en $\widehat{AGB}$ y para ρ' en $\widehat{AG'B}$. En consecuencia, G y G' están a distinto lado de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\widehat{AGB}$ y $\widehat{AG'B}$ son suplementarios. Además como los centros equidistan de los puntos correspondientes A y B, $\overline{GG'}$ es mediatriz de $\overline{AB}$. En definitiva, se concluye que $\widehat{GAG'}$ y $\widehat{GBG'}$ son rectos.

- **(d)** • Es inmediato aplicando al último resultado el teorema del arco capaz de un recto (pág. 96). ∎

Proposición. *Dada una rotación ρ, en π de centro G y ángulo no nulo ni llano, un punto A distinto de G y $B = \rho(A)$, el lugar geométrico de los puntos que son intersección de una recta a_o por A y su correspondiente $b_o = \rho(a_o)$, es una circunferencia que pasa por G, por A y por B.*

Demostración. Llamemos $\mathcal{L}$ al lugar. Primeramente hacemos notar que $\mathcal{L}$ contiene infinitos puntos ya que hay infinitas rectas en π por pasan por A y la recta correspondiente a cada una de ellas por ρ es una recta coplanar pero no paralela a la misma. Además, asociada a ρ, tenemos $\rho' = \rho \circ \sigma$, donde σ es la simetría central, en π, de centro B. ρ' también es una rotación, en π,. Sea G' su centro y $\mathcal{C}$ la circunferencia de diámetro $\overline{GG'}$. Es inmediato que $\mathcal{C}$ es la única circunferencia que contiene a A, B y G. Queremos mostrar que $\mathcal{L} = \mathcal{C}$, y lo haremos mostrando que $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ y que $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$. Para conseguirlo, nos será útil establecer que si t_a y t_b son las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ en A y B respectivamente, entonces:

$$\rho(t_a) = \overleftrightarrow{AB} = \rho^{-1}(t_b)$$

- $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ • Sea $C \in \mathcal{L}$.
  - Si $C \notin \{G, G'\}$ C será la intersección de dos rectas a_o y b_o con a_o por A, b_o por B y $\rho(a_o) = b_o$. Por lo estudiado al determinar el centro de un rotación a partir de dos semirrectas correspondientes, (pág. 88) el triángulo $\overset{\triangle}{GAG'}$ es rectángulo. Entonces por el teorema del arco capaz de un recto, (pág. 96) el punto $C \in \mathcal{C}$.
  - Si $C \in \{G, G'\}$ (lo cual puede ocurrir porque G y G' pertenecen a $\mathcal{L}$), es inmediato que $C \in \mathcal{C}$.

En resumen, si $C \in \mathcal{L}$ entonces $C \in \mathcal{C}$.

- $\rho(t_a) = \overleftrightarrow{AB} = \rho^{-1}(t_b)$ • ∘ Por el inciso anterior t_a y $\rho(t_a)$ se cortan en un punto de $\mathcal{C}$. Entonces deben cortarse en A lo cual significa que $\rho(t_a) = \overleftrightarrow{BA}$, ya que también debe pasar por B.

- ∘ Análogamente $\rho^{-1}(t_B)$ y su imagen $\rho(\rho^{-1}(t_b))$ deben cortarse en un punto de $\mathcal{C}$. Pero $\rho(\rho^{-1}(t_b)) = t_b$ y t_b tiene sólamente a B como punto de $\mathcal{C}$. Entonces $\rho^{-1}(t_B)$ debe ser $\overleftrightarrow{AB}$.

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$ • Sea $C \in \mathcal{C}$.

  - ∘ Si $C \notin \{A, B\}$, llamemos a_o a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y $b_o = \rho(a_o)$. Observamos que ya conocemos dos puntos de la recta a_o que pertenecen a $\mathcal{C}$: A y C.

    Con seguridad $a_o \neq t_a$ por lo que $b_o \neq \overleftrightarrow{AB}$. En consecuencia, el punto intersección de a_o y b_o es distinto de A. Ese punto debe ser C pues de otro modo la recta a_o contendría tres puntos de la circunferencia $\mathcal{C}$. Es decir $C \in \mathcal{L}$.

  - ∘ Para $C = A$ debemos mostrar que A es intersección de dos rectas correspondientes en ρ. Por el inciso anterior, esas rectas son t_B y $\overleftrightarrow{AB}$.

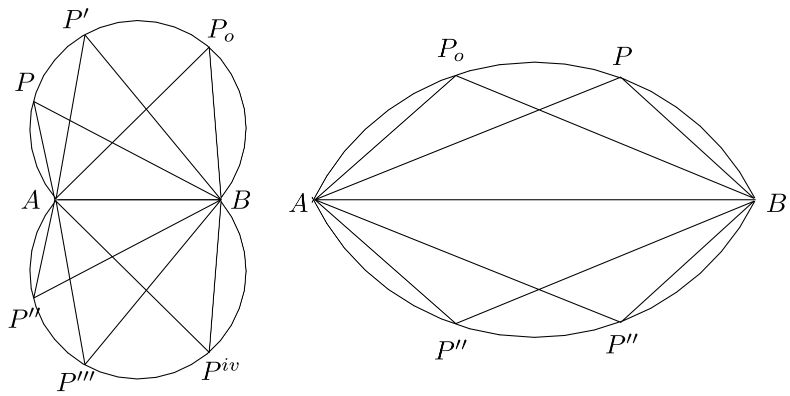
  - ∘ En forma similar para $C = B$ $\{B\} = \overleftrightarrow{AB} \cap t_B$.

Es decir si $C \in \mathcal{C}$ entonces $C \in \mathcal{L}$; eso significa que $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$.

■

Teorema. (Del arco capaz) *Dados en un plano π dos puntos A y B distintos, y un ángulo $\widehat{AP_oB}$ el lugar geométrico de los puntos P de π tales que $\widehat{APB} \equiv \widehat{AP_oB}$ está formado por dos arcos de circunferencia de extremos A y B, (de los que hay que excluir a A y a B) que contienen uno a P_o y otro al simétrico de P_o respecto de $\overleftrightarrow{AB}$.*

Demostración.



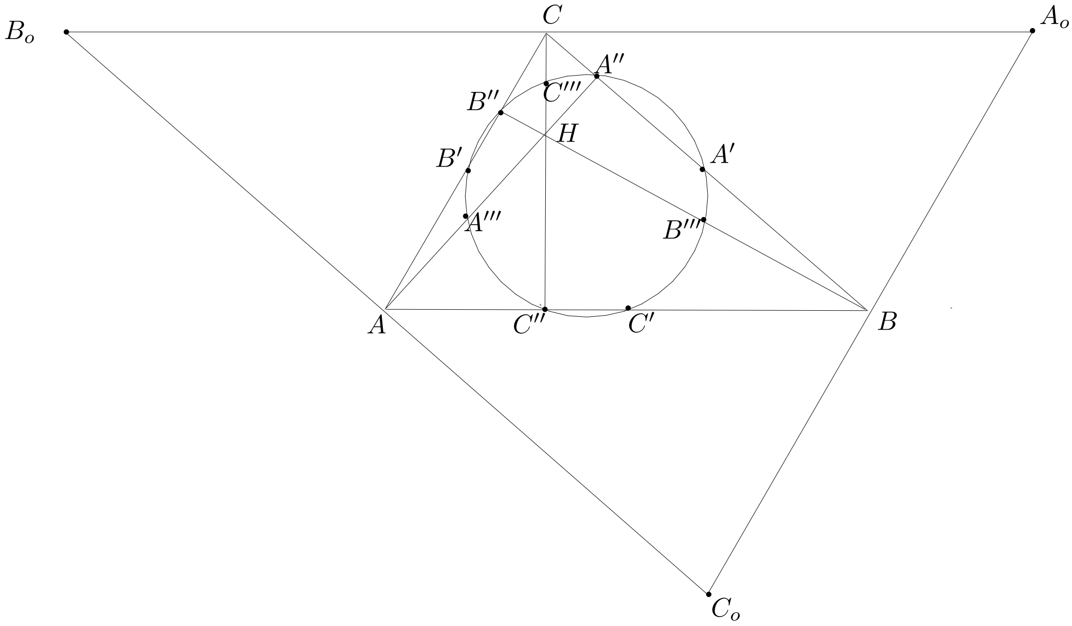
Es consecuencia inmediata de la proposición anterior. ■

9. Una aplicación: La circunferencia de los nueve puntos

Teorema. *Dado un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, cuyas rectas alturas son concurrentes en H, existe una circunferencia que pasa por los siguientes nueve puntos:*

- *los puntos medios de los lados del triángulo, A', B' y C'.*
- *los pies de las alturas del triángulo, A'', B'' y C''.*
- *los puntos medios de los segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$; A''', B''' y C''' respectivamente.*

Demostración.



- Cualquiera sea el triángulo, sus alturas son congruentes ya que esas alturas son las mediatrices de un triángulo $A_o\overset{\triangle}{B_o}C_o$ con lados paralelos a los del triángulo dado. (Las rectas determinadas por los puntos medios de dos lados de un triángulo son paralelas al otro lado).
- El ángulo $\widehat{A'A''A'''}$ es rectángulo, por ser A'' pie de la perpendicular $\overleftrightarrow{AA''}$ y esta pasa por A'''.
- Los ángulos $\widehat{A'B'A'''}$ y $\widehat{A'B'''A'''}$ son rectángulos, pues

$$\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'''B'''}, \quad \text{y} \quad \overleftrightarrow{A'''B'} \parallel \overleftrightarrow{CC''} \parallel \overleftrightarrow{A'B'''}$$

- También los ángulos $\widehat{A'C'A'''}$, $\widehat{A'C'''A'''}$ son rectángulos, por razones similares.

  Por el teorema del arco capaz del ángulo recto, la circunferencia de diámetro $\overline{A'A'''}$, que naturalmente pasa por A' y A''', pasa también por A', A''', A'', B', B''', C' y C'''.

  En forma análoga, la circunferencia de diámetro $\overline{B'B'''}$ pasa por B'', A', A''', C' y C'''. Y la circunferencia de diámetro $\overline{C'C'''}$ pasa por C', C''', C'', A', A''', B' y B'''.

  Dos cualesquiera de estas circunferencias comparten seis puntos (más de tres), por lo que las tres circunferencias coinciden. Esa circunferencia pasa por A', A'', A''', B', B'', B''', C', C'' y C'''. ∎

Capítulo IX

Transformaciones rígidas del plano. Transformaciones rígidas y pseudo-rígidas del espacio

1. Introducción

Conocemos varias t.r. en las que cierto plano π es estable. Algunas son directas en π: las simetrías centrales de π, o mejor dicho las simetrías axiales de ejes perpendiculares a π; y las traslaciones de guías paralelas a π; otras son t.r. inversas en π: las simetrías axiales de ejes incluidos en π. Veremos que hay otra t.r. inversa en π, la simetría deslizante, y que con ella se agotan las posibilidades de t.r con plano π estable.

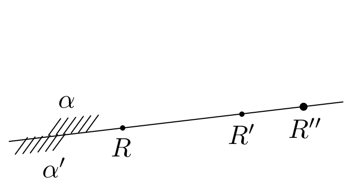
Además, también hay t.r. en las que ningún plano es estable: son las que llamaremos **movimiento s helicoidales** de ángulo no nulo ni llano. Por otro lado, hay un conjunto de transformaciones biyectivas que incluye a las t.r. y a otras que, sin ser t.r., comparten con ellas todas las propiedades con la excepción de la que hace referencia a la orientación del espacio: son las **transformaciones pseudo-rígidas**; cuando no son t.r. en lugar de preservar la orientación del espacio, la invierten.

Nota. Señalamos que es frecuente encontrar definiciones de t.r. del espacio que no exigen la preservación de la orientación; ver por ejemplo C. Ferraris, [1]; en estos casos las t.r. de ellos abarcan también a las transformaciones pseudo-rígidas de nosotros. Nuestra definición concuerda con la de Puig Adam, [2].

2. Simetría deslizante

Definiciones.

- Una t.r. μ se llama **simetría deslizante** si existe un par (a, β) — donde β es uno de los semiplanos cuyo borde incluye a la semirrecta a—, tal que $\mu(a)$ está incluída en a y $\mu(\beta)$ es el semiplano opuesto del β. (Debemos exigir además $\mu(a) \neq a$ para que esta μ no sea una simetría axial).
- Dados dos puntos R y R', distintos, de un plano π, se llama **simetría deslizante**, en π, de eje $\overleftrightarrow{RR'}$ y que lleva R a R' a la t.r. que transforma a la semirrecta $\overrightarrow{RR'}$ en la semirrecta opuesta de la $\overrightarrow{R'R}$ y a uno de los semiplanos de π de borde $\overleftrightarrow{RR'}$ en el semiplano opuesto.



Simetría deslizante de eje $\overleftrightarrow{RR'}$ y que lleva R a R'

$$\begin{cases} \mu(\overrightarrow{RR'}) = \overrightarrow{R'R''} \\ \mu(\alpha) = \alpha' \end{cases}$$

Expresión de una simetría deslizante como composición de otras t.r.

Proposición. *Sea μ la simetría deslizante definida más arriba a partir de R, R' y π; τ la traslación que envía R a R' y σ la simetría axial de eje $\overleftrightarrow{RR'}$. Sea R'' tal que R' está entre R y R''. Se cumple que el eje de σ es estable en τ y*

$$(i)\ \ \mu = \sigma \circ \tau, \qquad (ii)\ \ \mu = \tau \circ \sigma.$$

Además σ y τ son las únicas que, teniendo eje de σ estable en τ, cumplen (i) *o* (ii).

Demostración.

- **Posibilidad de la descomposición** • Como tanto μ, como $\sigma \circ \tau$ y $\tau \circ \sigma$ son t.r. inversas en π, basta verificar que las tres t.r. actúan del mismo modo sobre una semirrecta:

$$\mu(\overrightarrow{RR'}) = \overrightarrow{R'R''}, \quad \sigma(\tau(\overrightarrow{RR'})) = \sigma(\overrightarrow{R'R''}) = \overrightarrow{R'R''}, \quad \tau(\sigma(\overrightarrow{RR'})) = \tau(\overrightarrow{RR'}) = \overrightarrow{R'R''}$$

  Nota. Señalamos que no siempre una simetría axial y una traslación conmutan; pero sí lo hacen en este caso en que las guías de la traslación son paralelas al eje de la simetría.

- **Unicidad de la descomposición** • Surge de los hechos siguientes:
  - Cualquier composición de simetría axial y traslación de guías paralelas al eje de simetría tiene, como recta estable, al eje de la simetría.
  - La recta $\overleftrightarrow{RR'}$ es la única recta de π estable en μ. (A uno de los semiplanos de π de borde esa recta le corresponde el opuesto, y a uno de los semiespacios de borde π le corresponde el opuesto.)

  Es decir que σ es única. Y τ también es única ya que de

$$\mu = \tau \circ \sigma,$$

  se despeja

$$\tau = \mu \circ \sigma^{-1} = \mu \circ \sigma.$$

■

La proposición justifica hablar del **eje de la simetría deslizante** y también hablar de la simetría axial y de la traslación que son **componentes de la simetría deslizante**.

Como consecuencia inmediata de la definición o de la proposición anterior podemos enunciar:

Propiedades de las simetrías deslizantes

Sea μ la simetría deslizante en las condiciones de la definición anterior. Sean α y α' los semiplanos opuestos de borde $r = \overleftrightarrow{RR'}$ incluidos en π.

(a). *El plano π es estable en μ, y μ es una t.r. inversa en π.*

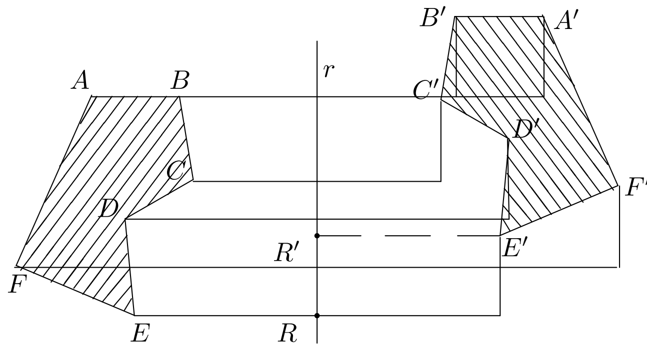
(b). *La imagen por μ de cualquier semiplano de borde r es el semiplano opuesto. Y todos los planos que incluyen a r son estables*

En consecuencia el plano π no juega un papel importante: Podemos obviar el mencionar a π al hablar de μ.

(c). *No hay puntos fijos en μ.*

(d). *El eje de la simetría deslizante es la única recta estable en μ.*

(e). *El eje es el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos determinados por pares de puntos correspondientes en μ*



Figuras correspondientes en la simetría deslizante de: eje r que lleva R a R'.

3. Movimiento helicoidal

Definiremos un tipo de t.r. que, según verificaremos posteriormente, incluye a cualquier otra t.r.: el movimiento helicoidal. Se define como composición de una rotación y una traslación en determinadas condiciones. Y gracias a la proposición siguiente, el orden en que se realice la composición será irrelevante.

Proposición. *Una rotación de eje e y una traslación de guías paralelas a e conmutan.*

Demostración. La traslación τ enviará un punto O de e a otro punto de e, O'. Sea O'' otro punto tal que O' esté entre O y O''. Sea α un semiplano de borde e y $\alpha' = \rho(\alpha)$. Tanto α como α' son estables en τ así que se cumple:

$$\begin{cases} \rho(\tau(\overrightarrow{OO'})) = \rho(\overrightarrow{O'O''}) = \overrightarrow{O'O''} \\ \rho(\tau(\alpha)) = \rho(\alpha) = \alpha' \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau(\rho(\overrightarrow{OO'})) = \tau(\overrightarrow{OO'}) = \overrightarrow{O'O''} \\ \tau(\rho(\alpha)) = \tau(\alpha') = \alpha' \end{cases}$$

Por lo tanto $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$. ∎

Definiciones. Dados una recta e, dos puntos O y O' de e, y dos semirrectas a y b de origen O incluidas en el plano π, perpendicular a e por O, se llama **movimiento helicoidal** o **transformación helicoidal de eje** e **y ángulo orientado** $\widehat{ab}$, (con vértice en O), a la composición de la rotación de ángulo orientado $\widehat{ab}$ con la traslación que envía O a O'. A la recta e se le llama **eje del movimiento helicoidal**, y al ángulo orientado $\widehat{ab}$, **ángulo orientado del movimiento helicoidal**.
Hablaremos de **movimiento helicoidal propiamente dicho** si $O \neq O'$ y el ángulo $\widehat{ab}$ no es ni nulo ni llano.

Se deja como ejercicio justificar:

Proposición. *En relación a la definición anterior, si el ángulo* $\widehat{ab}$ *es nulo,* μ *es una traslación. Si es llano, entonces* μ *coincide con la simetría deslizante de eje* e *que envía* O *a* O'*. Por otro lado, si la traslación fuera nula, la t.r. coincidiría con una rotación. Y si tanto la rotación como la traslación fueran nulas, la t.r. se reduciría a la identidad.*

Proposición. *Si cierta t.r. se puede expresar como composición de una rotación* ρ_{ab} *con una traslación* $\tau_{OO'}$*, tales que el eje de la rotación es estable en la traslación, entonces también se puede expresar como la composición, en el otro orden, de ambas t.r.*

$$\tau_{OO'} \circ \rho_{ab} = \rho_{ab} \circ \tau_{OO'}$$

Demostración. La proposición es trivial si la rotación o la traslación es la identidad. Supongamos que ambas son distintas de la identidad. El eje de la rotación será perpendicular al plano determinado por a y b. No se pierde generalidad si suponemos que O es precisamente el vértice del ángulo $\widehat{ab}$. $O \in e$ y también $O' \in e$. Es decir $e = \overleftrightarrow{OO'}$.
Sea α el semiplano de borde e que incluye a la semirrecta a y β el semiplano de borde e que incluye a la semirrecta b.
Sea O'' tal que O' está entre O y O''. Veamos como actúan las composiciones dadas sobre una semirrecta de e y el semiplano α de borde e. se cumple:

- $\rho(\overrightarrow{OO'}) = \overrightarrow{OO'}$; $\quad \rho(\alpha) = \beta$
- $\tau(\overrightarrow{OO'}) = \overrightarrow{O'O''}$; $\quad \tau(\alpha) = \alpha$; $\quad \tau(\beta) = \beta$,
  porque ambos semiplanos tienen por borde una guía de la traslación.

Por lo tanto,

$$\begin{cases} (\tau_{OO'} \circ \rho_{ab})(\overrightarrow{OO'}) = \tau_{OO'}(\overrightarrow{OO'}) = \overrightarrow{O'O''} \\ (\tau_{OO'} \circ \rho_{ab})(\alpha) = \tau_{OO'}(\beta) = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} (\rho_{ab} \circ \tau_{OO'})(\overrightarrow{OO'}) = \rho_{ab}(\overrightarrow{O'O''} = \overrightarrow{O'O''} \\ (\rho_{ab} \circ \tau_{OO'})(\alpha) = \rho_{ab}(\alpha) = \beta \end{cases}$$

Así que $\rho_{ab} \circ \tau_{OO'} = \tau_{OO'} \circ \rho_{ab}$. ∎

Antes de estudiar las propiedades de esta t.r. nos será útil analizar la existencia y unicidad de una recta perpendicular común a dos rectas alabeadas. El problema tiene aplicaciones por sí mismo ya que el segmento de perpendicular común que se apoya en las dos rectas alabeadas es menor que cualquier otro segmento que se apoye en ambas rectas.

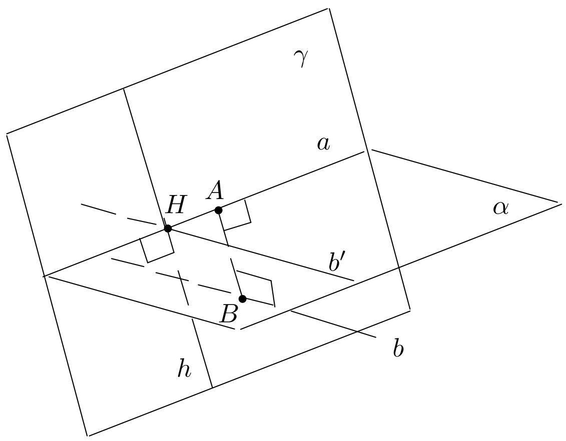
4. Perpendicular común a dos rectas

Sabemos que con dos rectas a y b distintas, puede ocurrir una y sólo una de estas tres situaciones:

(a). $a \parallel b$. Cualquier recta del plano perpendicular a la primera es perpendicular a la segunda. Y ninguna recta no coplanar con a y b puede ser concurrente con ambas. Es decir tenemos infinitas rectas que son perpendiculares a ambas rectas, todas ellas coplanares y paralelas entre sí.

(b). a y b secantes en P. Ninguna recta del plano π determinado por a y b es perpendicular a ambas. Pero si hay exactamente una recta, no coplanar con ellas, que es perpendicular a a y b: la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π.

(c). a y b alabeadas. Podemos considerar una paralela a b, b' por un punto H de a. Resultará $b \neq a$. Sea h la recta perpendicular a las rectas a y b' por H. Y γ el plano determinado por a y h. Con seguridad b' no está incluida en γ, pues de otro modo, en ese plano habría dos rectas perpendiculares a h por A, la a y la b'. Entonces, b no es paralela a γ, y existirá un punto B tal que $\{B\} = \gamma \cap b$. Sea A el pie de la perpendicular desde B a a. Naturalmente, A también pertenece a γ. La recta $\overleftrightarrow{AB}$ es perpendicular tanto a a como a b. Si bien hay muchas rectas ortogonales simultáneamente a las rectas a y b, todas ellas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$, la única que además es concurrente con ambas es la $\overleftrightarrow{AB}$.



$H \in a$
$b' \parallel b, \quad H \in b'$
plano α:
$a \subset \alpha, \quad b' \subset \alpha$
$h \perp \alpha, \quad H \in h$
plano γ:
$a \subset \gamma, \quad h \subset \gamma$
$\{B\} = \gamma \cap b$
$\overleftrightarrow{BA} \parallel h, \quad A \in a, \quad a \perp \overleftrightarrow{AB} \perp b$

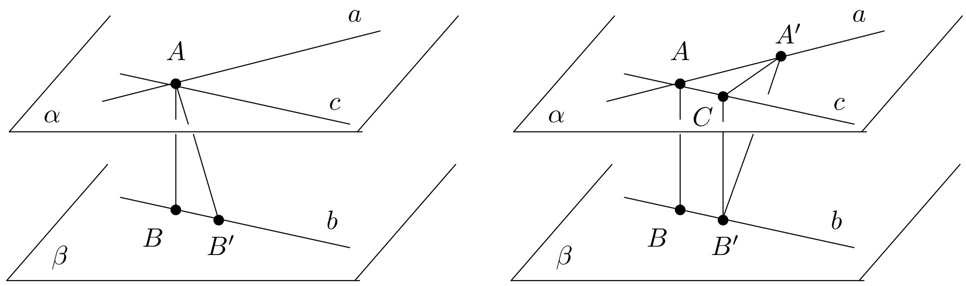
Proposición. *El segmento $\overline{AB}$ de perpendicular común a dos rectas a y b es menor que cualquier otro $\overline{A'B'}$, con $A' \in a$, $B' \in B$ y $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$.*

Demostración. Sea α el plano por A perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y β el plano por B perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Sucederá que

$$\alpha \perp \overleftrightarrow{AB} \perp \beta, \quad a \subset \alpha, \quad b \subset \beta, \quad \alpha \parallel \beta$$

Sea A' un punto cualquiera de a, B' un punto cualquiera de b, c la recta por A paralela a b y C el pie de la perpendicular desde B' a α. Seguramente $C \in c$.

- Si $A = A'$, será $B \neq B'$. El triángulo $\overset{\triangle}{ABB'}$ es rectángulo en B por lo que su hipotenusa es mayor que cualquiera de sus catetos. Entonces, $\overline{AB'} > \overline{AB}$.



- Si $A' \neq A$ también deberá ser $A' \neq C$. (Sí podría ocurrir que $B' = B$ y $C = A$). El triángulo $\overset{\triangle}{A'CB'}$ es rectángulo en C por lo que $\overline{A'B'} > \overline{CB'}$. Además $\overline{AB} \equiv \overline{CB'}$ pues son segmentos correspondientes en la traslación τ_{AC}. Así que $\overline{A'B'} > \overline{AB}$. ∎

Proposición. *La composición de dos simetrías axiales de ejes alabeados es un movimiento helicoidal cuyo eje es la recta perpendicular común a los ejes de las simetrías componentes.*

Demostración. Esa perpendicular común es una recta estable en la composición, y el orden de los puntos en ella es preservado por ese movimiento helicoidal. ∎

Propiedades del movimiento helicoidal

La mayoría de las propiedades siguientes son de demostración inmediata; se dejan como ejercicio. Sea μ el movimiento helicoidal correspondiente a una rotación de eje e y ángulo orientado $\widehat{ab}$ no nulo ni llano, de vértice O y a la traslación $\tau_{OO'}$, con $O \neq O'$, y $e = \overleftrightarrow{OO'}$. Sea π el plano perpendicular a e por O. Incluirá tanto a a como a b.

(a). *A cada plano perpendicular al eje, por ejemplo a π, le corresponde uno distinto también perpendicular al eje. En consecuencia no hay puntos fijos en μ.*

(b). *La recta e es estable en μ.*

(c). *Ningún semiplano de borde e es estable en μ.* (Recordar que hemos pedido que $\widehat{ab}$ no sea nulo).

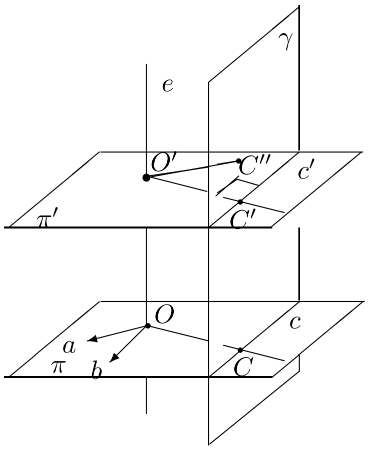
(d). *Ningún semiplano de borde e se transforma en su opuesto.* (Recordar que hemos pedido que $\widehat{ab}$ no sea llano).

(e). *Ningún plano que incluya a e es estable en μ.* Es consecuencia de las tres anteriores.

(f). *Ningún plano es estable en μ.*

Demostración. Un plano estable no puede incluir a e por el inciso anterior. Queda por analizar y descartar los dos casos siguientes:

- **Caso de un posible plano estable, γ paralelo a e que no contiene a e** •



eje de giro: $e = \overline{OO'}$.
ángulo orientado de giro: $\widehat{ab} \subset \pi$ con vértice O.
plano π tal que $O \in \pi \perp e$
plano π' tal que $O' \in \pi' \perp e$
punto C tal que $C \in \gamma$, $\overleftrightarrow{OC} \perp \gamma$
punto C' tal que $C' \in \gamma$, $\overleftrightarrow{O'C'} \perp \gamma$
$c = \gamma \cap \pi$, $c' = \gamma \cap \pi'$
Resulta $\overleftrightarrow{OC} \perp c$, $\overleftrightarrow{O'C'} \perp c'$
C'' tal que $\overline{OC} \equiv \overline{OC''}$ y
$\widehat{C'OC''}$ es otro ángulo orientado que define al mismo giro.

Se cumple:

$$\mu(O) = \rho_{ab}(\tau_{OO'}(O)) = \rho_{ab}(O') = O'$$
$$\mu(C) = \rho_{ab}(\tau_{OO'}(C)) = \rho_{ab}(C') = C''$$

Si γ fuera estable en μ debería ser

$$\mu(c) = \mu(\gamma \cap \pi) = \gamma \cap \pi' = c',$$

es decir $C'' \in c'$; eso es absurdo pues el cateto $\overline{O'C'}$ no puede ser congruente con lo que sería hipotenusa $\overline{O'C''}$.

- **Caso de un posible plano estable γ, secante con e.** • γ y e se cortarán en un punto, llamémosle M (No está ilustrado). Entonces

$$\mu(M) \in \mu(e \cap \gamma) = \mu(e) \cap \mu(\gamma) = e \cap \mu(\gamma).$$

Si fuera γ estable en μ, el punto M resultaría fijo, lo cual contradiría que no hay puntos fijos en μ. ∎

(g). *No hay ninguna recta distinta de e que sea estable en μ.*

Demostración. Sea r una recta cualquiera distinta de e. Si suponemos que r es estable, llegaremos a un absurdo: Si r fuera estable,

- si e y r son coplanares, entonces el plano que incluye a ambas rectas sería estable y ya vimos en el inciso (f) que no hay ninguno.
- si son alabeadas entonces existirán $E \in e$ y $R \in r$ tales que $\overline{ER}$ es el único segmento de perpendicular común a r y a s. Por la μ se transformaría en segmento de perpendicular común a ambas rectas, distinto del anterior, porque no hay puntos fijos: $\mu(\overline{ER}) = \overline{E'R'}$. Y sabemos que para rectas alabeadas hay exactamente un segmento de perpendicular común. ∎

5. Restricciones y extensiones de transformaciones biyectivas.

Cada vez que se tiene una transformación biyectiva μ de Ω y un conjunto $\mathcal{X}$ estable tanto en μ como en μ^{-1}, es posible **restringir** dominio y codominio a $\mathcal{X}$ para obtener una transformación biyectiva de $\mathcal{X}$, μ', que recibe el nombre de **restricción de μ a $\mathcal{X}$**. Además decimos que μ es una **extensión** de μ'. Por cada t.b. μ de Ω para la que $\mathcal{X}$ es estable hay exactamente una restricción de μ, μ', a $\mathcal{X}$. En cambio, una μ' t.b. de $\mathcal{X}$, podría tener más de una extensión a una t.b. de todo Ω.

Por ejemplo, cualquier rotación de eje r tiene a r como recta estable; más aun, como todos los puntos del eje son fijos, la restricción de cualquiera de esas rotaciones, a r, es la función identidad. Pero hay infinitas rotaciones de eje r, así que hay infinitos modos de extender la identidad en r a una t.r. de todo el espacio.

Sin embargo, para las t.r. de Ω en las que cierto plano π es estable, sucede algo muy especial: Dada una restricción de una de esas t.r. a π, hay muchas extensiones a transformaciones biyectivas de todo Ω; pero hay exactamente una de ellas que es también transformación rígida de todo el espacio.

Llamaremos **transformación rígida de un plano** π a la restricción a π de una t.r. que sea estable en π.

Haremos un resumen sobre las t.r. de un plano π. Es decir sobre las restricciones a π de las t.r. de Ω para las que π es estable.

6. Todas las transformaciones rígidas de un plano π

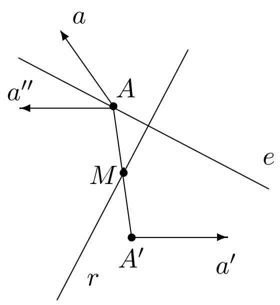
Resumimos en la tabla IX.1 la identificación de una t.r. de π a partir del conocimiento de si es directa o inversa y de una semirrecta y su imagen.

Los casos de la tabla correspondientes a t.r. directas han sido justificados anteriormente. Veremos ahora la justificación de los casos de t.r. inversas.

Lema. *Sea μ una t.r. inversa en π. Entonces existe exactamente una recta de π, llamémosla r, estable en μ, y tal que μ preserva el orden de los puntos de r.*

Demostración. Sea A cualquier punto de π, y $A' = \mu(A)$.

- Si $A = A'$, sabemos que μ es una simetría axial cuyo eje r pasa por A; y ese eje tiene todos sus puntos fijos, por lo que μ preserva el orden para r.
- Si $A \neq A'$, utilizaremos una t.r. auxiliar σ_M para llevar esta situación desconocida al caso anterior: Llamamos σ_M a la simetría central, en π, de centro M, punto medio de $\overline{AA'}$; y σ a la composición de μ y σ_M. Se cumple:
$$\sigma = \sigma_M \circ \mu, \qquad \mu = (\sigma_M)^{-1} \circ \sigma = \sigma_M \circ \sigma$$
σ es una t.r. inversa; y tiene un punto fijo que es A ya que:
$$\sigma(A) = \sigma_M(\mu(A)) = \sigma_M(A') = A$$
Entonces σ es una simetría axial cuyo eje pasa por A. Llamemos e a su eje. (Concretamente, si $a' = \sigma(a)$ y $a'' = \sigma_M(a')$, e es la recta que incluye a la bisectriz de $\widehat{aa'}$). Sea r la recta de π perpendicular a e por M. r cumple lo pedido, pues es estable tanto en σ_M como en σ; y como ambas invierten el orden para r, su composición preserva dicho orden.
$$\mu(r) = (\sigma_M \circ \sigma)(r) = \sigma_M(\sigma(r)) = \sigma_M(r) = r$$



■

Cuadro IX.1: Dados una semirrecta a de origen A y una semirrecta a' de origen A' incluidas en π, existe exactamente una t.r. directa, η , y otra t.r. inversa, μ en las que $\eta(a) = a'$ y $\mu(a) = a'$

CONDICIONES DE DATOS			DIR./INV.	IDENTIFICACION (en π)
$A = A'$	$a \parallel a'$ y de igual sentido	(a=a')	Directa	Identidad
			Inversa	Simetría axial; su eje incluye a a
	$a \parallel a'$ y de dist. sentido		Directa	Simetría central, en π; su centro es A
			Inversa	Simetría axial; su eje es perpendicular a a por A
	$a \nparallel a'$		Directa	Rotación; centro A y ángulo $\widehat{aa'}$
			Inversa	Simetría axial; su eje incluye a la bisectriz de $\widehat{aa'}$
$A \neq A'$	$a \parallel a'$ y de igual sentido		Directa	Traslación; lleva A a A'
$b = \overrightarrow{AA'}$		$a \perp s$	Inversa	Simetría axial; su eje es mediatriz de $\overline{AA'}$
$b' = \overrightarrow{A'A}$		$a \not\perp s$		Simetría deslizante; su eje es paralelo a a y pasa por punto medio de $\overline{AA'}$; lleva A a A'.
$s = \overleftrightarrow{AA'}$	$a \parallel a'$ y de sentido contrario		Directa	Simetría central, en π; su centro es punto medio de $\overline{AA'}$
		$a \cup a' = s$	Inversa	Simetría axial; su eje es mediatriz de $\overline{AA'}$
		$a \cup a' \neq s$		Simetría deslizante; su eje es perpendicular a a, y pasa por punto medio de $\overline{AA'}$ (Ver pág. 107)
	$a \nparallel a'$		Directa	Rotación. (Ver pág. 88)
		$\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}$	Inversa	Simetría axial; su eje es mediatriz de $\overline{AA'}$
		$\widehat{ab} \not\equiv \widehat{a'b'}$		Simetría deslizante (ver pág. 107)

Proposición. (Sobre simetría deslizante) *Sea μ una t.r. inversa en π. Entonces μ se expresa, de modo único, como composición, en cualquier orden, de una simetría axial de eje r y una traslación en la que r es estable.*

Demostración. Por el lema anterior existirá una recta r estable en μ y tal que μ preserva su orden. Sea σ_r la simetría axial de eje r y τ la composición de μ y σ_r. Se cumple:

$$\tau = \sigma_r \circ \mu, \qquad \mu = (\sigma_r)^{-1} \circ \tau = \sigma_r \circ \tau$$

También r es estable en τ puesto que lo es en μ y en σ_r.

$$\tau(r) = (\sigma_r \circ \mu)(r) = \sigma_r(\mu(r)) = \sigma(r) = r$$

Como τ es composición de dos t.r. inversas en π, resulta τ directa en π. Tanto μ como τ preservan el orden para r, así que lo mismo hace τ. Entonces τ es una traslación y la composición pedida es

$$\mu = \sigma_r \circ \tau$$

- Si τ es una traslación no nula entonces μ es una simetría deslizante y como τ tiene guías paralelas a r, σ_r y τ son las correspondientes simetría y traslación componentes, que ya sabemos son únicos (Ver pág. 102); y permiten expresar:
$$\mu = \sigma_r \circ \tau = \tau \circ \sigma_r$$
- Si τ es la traslación nula, $\mu = \sigma_r$ y todos los puntos de τ son fijos. Y ninguna otra composición de una simetría axial con una traslación no nula de guías paralelas al eje tendrá puntos fijos. ∎

Las simetrías axiales generan todas las t.r de un plano

Teorema. *Cualquier t.r. de π se puede expresar como composición de, a lo sumo, tres simetrías axiales.*

Demostración.

Simetría central de centro O: Se puede expresar como composición de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares y concurrentes en O.

Traslación que envía A a B, con $A \neq B$: Sea M el punto medio de $\overline{AB}$, a y m perpendiculares, en π, a $\overleftrightarrow{AB}$, a por el punto A y m por M. La traslación dada se expresa como $\sigma_m \circ \sigma_a$ con σ_a y σ_m las simetrías axiales de ejes a y m respectivamente.

Rotación de ángulo orientado $\widehat{ab}$, centro en el vértice de $\widehat{ab}$: Sea m la recta que incluye a la bisectriz de $\widehat{ab}$. La rotación dada se expresa como $\sigma_m \circ \sigma_a$ con σ_a y σ_m las simetrías axiales de ejes la recta que incluye a a y m respectivamente.

Simetría deslizante: Es una composición de una traslación no identidad (que se consigue con dos simetrías axiales) y una simetría axial. En total, tres simetrías axiales.

Nota. Si se permite que los ejes de las rotaciones no pertenezcan al plano π es posible obtener una simetría deslizante como composición de dos simetrías con ejes ortogonales al eje de la simetría deslizante

■

7. Todas las t.r. del espacio

Recordamos que, en este curso, todas las t.r. preservan la orientación del espacio. Veamos que ya hemos estudiado todas las posibles t.r. del espacio.

Lema. (De la recta estable con orden preservado) *Dada cualquier t.r. μ, existe al menos una recta e estable en μ tal que μ preserva el orden en e.*

Demostración. Sea A un punto, $A' = \mu(A)$ y ρ la t.r. dada por:

$$\rho = \tau_{AA'} \circ \mu. \quad \text{Tendremos: } \mu = (\tau_{A'A})^{-1} \circ \rho = \tau_{AA'} \circ \rho.$$

Se cumple

$$\rho(A) = (\tau_{A'A} \circ \mu)(A) = \tau_{A'A}(\mu(A)) = \tau_{A'A}(A') = A,$$

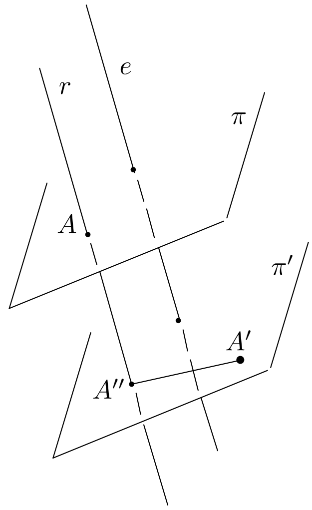
es decir que, por el lema de la pág 91, ρ es una rotación cuyo eje r (un único posible eje si ρ no es la identidad) pasa por A.

Así que podemos sacar conclusiones sobre μ, a partir de las características de ρ en relación con A y A':

- Si ρ es la rotación identidad, entonces μ coincide con la traslación $\mu = \tau_{AA'}$, por lo que habrá infinitas rectas estables en μ, todas paralelas a $\overleftrightarrow{AA'}$, cuyo orden es preservado por μ. Y recíprocamente, si μ es una traslación la ρ resultante es la identidad.
- Si ρ no es la rotación identidad, sea π el plano por A perpendicular a r, y π' el plano por A' perpendicular a r. Si $\pi \neq \pi'$, sea ϵ el semiespacio de borde π que incluye a π' y ϵ' el semiespacio de borde π' que no incluye a π. Si $\pi = \pi'$, sea ϵ uno de los semiespacios de borde π y $\epsilon' = \epsilon$.

  Resultará $\pi \parallel \pi'$; esos planos son estables en ρ; y ρ directa en esos planos. Y lo mismo vale para μ ya que:

$$\mu(\pi) = \tau_{AA'}(\rho(\pi)) = \tau_{AA'}(\pi) = \pi', \qquad \mu(\epsilon) = \tau_{AA'}(\rho(\epsilon)) = \tau_{AA'}(\epsilon) = \epsilon'$$



Sea A'' el pie de la perpendicular desde A' sobre r. Seguro que $A'' \in \pi'$ y $r = \overleftrightarrow{AA''}$. En la traslación $\tau_{A''A}$, la recta r y todas sus paralelas son estables. Sea

$$\rho' = \tau_{A''A} \circ \mu. \quad \text{Entonces} \quad \mu = (\tau_{A''A})^{-1} \circ \rho' = \tau_{AA''} \circ \rho'.$$

$$\rho'(\pi) = \tau_{A''A}(\mu(\pi)) = \tau_{A''A}(\pi') = \pi, \qquad \rho'(\epsilon) = \tau_{A''A}(\mu(\epsilon)) = \tau_{A''A}(\epsilon') = \epsilon.$$

Entonces π es estable en ρ', y ρ' es directa en π. Por lo tanto ρ', que no puede ser una traslación, pues si no también lo sería μ, será una rotación cuyo eje e cumplirá $e \perp pi$ y por lo tanto $e \parallel r$.

e es la recta buscada pues es estable en μ,

$$\mu(e) = \tau_{AA''}(\rho'(e)) = \tau_{AA''}(e) = e,$$

y como tanto $\tau_{AA''}$ como ρ' preservan el orden de e, también lo hace μ. ∎

Teorema. (Cualquier t.r. es un movimiento helicoidal) *Cualquier t.r. se puede expresar como composición, en cualquier orden, de una rotación y una traslación; y hay una recta de puntos fijos en la rotación—eje de la rotación—que es estable en la traslación.*

Demostración.

- **Posibilidad de la descomposición:** • Sea μ una t.r. y e una recta estable en μ tal que μ preserva el orden de e. (La existencia de tal e está asegurada por el lema anterior).

  Sea $O \in e$ y $O' = \mu(O) \in e$. Sea

  $$\rho = \tau_{O'O} \circ \mu, \quad \text{de donde} \quad \mu = (\tau_{O'O})^{-1} \circ \rho = \tau_{OO'} \circ \rho$$

  La recta e es estable en $\tau_{OO'}$ y tiene todos sus puntos fijos en ρ. Y ya sabemos que rotación y traslación en esas condiciones conmutan.

- **Unicidad de la descomposición:** • Sea $\mu = \tau \circ \rho = \rho \circ \tau$
  - Si hay más de una recta de puntos fijos en μ, μ tiene que ser la identidad. Y la única posibilidad para rotación y traslación que sean una inversa de la otra es que ambas coincidan con la identidad: rotación nula, de eje cualquiera, y traslación nula.
  - Si sólo hay una recta de puntos fijos, esa es el eje de la rotación. La traslación queda determinada por un punto del eje O y su imagen $O' = \mu(O)$: sólo una τ es posible. Y ρ se despeja de $\mu = \tau \circ \rho$, también es única. ∎

8. Resumen sobre transformaciones rígidas y elementos fijos o estables

- Con tres puntos no alineados fijos: todos los puntos serán fijos: **identidad**.
- Con todos los puntos de una recta (recta e) fijos y nada más que ellos.
  - Con todas las rectas perpendiculares a e estables, además de la misma e: **simetría axial de eje e. (simetría central en los planos perpendiculares a e)**.
  - Con ninguna recta, aparte de la e, que sea estable: **rotación de eje e y ángulo no nulo ni llano**.
- Con sólo un punto fijo o sólo dos puntos fijos no hay ninguna t.r.: si hay un punto fijo, habrá toda una recta de puntos fijos.
- Con ningún punto fijo: Siempre habrá al menos una recta e estable.
  - Con toda una familia de rectas paralelas estables: **traslación cuyas guías son las rectas estables**
  - Con una única recta estable:
    - con todos los planos que incluyen a e estables: **simetría deslizante de eje esa recta**.
    - con ningún plano estable: **transformación helicoidal propiamente dicha, con eje esa recta**.

9. Transformaciones pseudo-rígidas del espacio

Introducción

Si observamos en un espejo la imagen de un objeto “geométrico” aceptaremos sin dificultad que los segmentos y ángulos del objeto tienen por imágenes segmentos y ángulos congruentes con los primeros. ¿Podrá aceptarse que el objeto y su imagen sean correspondientes en una t.r.? La respuesta es, casi siempre, negativa:

Si miramos a un espejo de modo que sólo veamos en él la imagen de nuestra mano derecha, esa imagen va a parecerse muchísimo a nuestra mano izquierda: no nos costaría mucho imaginar que en lugar de estar mirando en un espejo, sea nuestra propia mano izquierda la que está detrás del “vidrio”. Sin embargo, la orientación indicada con los dedos pulgar índice y medio de la mano derecha es contraria a la indicada por los mismos dedos de la mano izquierda. Como las t.r. preservan la orientación del espacio, no puede haber ninguna t.r. que transforme una mano derecha en una izquierda.

Las imágenes producidas por un espejo sugieren estudiar otras transformaciones biyectivas, a las que se les exigirá todo lo que cumplen las rígidas con excepción de la preservación de la orientación del espacio. Ejemplos de estas transformaciones serán, naturalmente, las propias t.r. Pero también tendremos simetrías especulares que nos servirán, desde el punto de vista práctico, para estudiar relaciones entre objetos y sus imágenes producidas por espejos “perfectos”.

Cuando se usa más de un espejo, cada objeto produce una imagen al reflejarse en cada uno de los espejos. Pero además, cada imagen es un objeto que se refleja nuevamente .... De modo que puede pensarse que algunas imágenes son el resultado de la composición de varias transformaciones.

Supongamos que pintamos nuestra mejilla derecha con un lunar. Si nos miramos a un espejo, el lunar de la imagen aparecerá también a nuestra derecha. En cambio cualquier otra persona que nos mire directamente, verá nuestro lunar de nuestra derecha a su izquierda. Es decir que los demás no nos ven a nosotros como nosotros mismos nos vemos en un espejo.

Podemos vernos como los demás nos ven, si nos miramos “simultáneamente” en un par de espejos perpendiculares. Y es que en ese caso estamos viendo el resultado de la composición de dos simetrías especulares, que sí es una t.r.

Vale la pena hacer la experiencia aun sin ningún lunar agregado: descubriremos así las faltas de simetría de nuestro rostro (¡ si es que hay alguna!)

Definición. Llamamos **transformación pseudo-rígida** del espacio a cualquier transformación biyectiva del espacio que preserve la alineación, la relación estar entre, y tal que transforme a cada segmento en otro respectivamente congruente. Este tipo de transformaciones también va a transformar ángulos en otros congruentes ya que si el ángulo es el $\widehat{ABC}$, dado por tres puntos no alineados A, B y C, las imágenes de los puntos por la transformación, A', B' y C' determinan la imagen del ángulo; se cumple:

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}, \quad \overline{CA} \equiv \overline{C'A'}.$$

Así que, por el caso L-L-L de congruencia de triángulos, $\overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{A'B'C'}$ y en consecuencia,

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}.$$

Es decir que, lo único que le exigimos a una t.r. que no le exigimos a una transformación pseudo-rígida es la preservación de la orientación del espacio. En lo que sigue abreviaremos “transformación pseudo-rígida” o transformaciones pseudo-rígidas” por “t.sr.”

Es fácil convencerse de que una t.sr. queda determinada dando los siguientes tres objetos y sus respectivas imágenes:

- una semirrecta.
- un semiplano de borde esa semirrecta, es decir de borde la recta que incluye a la semirrecta.
- un semiespacio de borde ese semiplano, es decir de borde el plano que incluye al semiplano.

Ya que un plano determina dos semiespacios, dando un par semirrecta, semiplano de borde la semirrecta, a y α y un par semirrecta semiplano de borde la semirrecta, a' y α', existe exactamente una t.r. o t.sr. directa del espacio, μ_1, en la que $\mu_1(a) = a'$ y $\mu_1(\alpha) = \alpha'$; y existe exactamente una t.sr. inversa en el plano, μ_2, en la que $\mu_2(a) = a'$ y $\mu_2(\alpha) = \alpha'$.

Cuando α y α' son coplanares, en un plano π, el plano resulta estable tanto en μ_1 como en μ_2. Y las restricciones de μ_1 y μ_2 al plano π coinciden. Y ambas transformaciones son directas en π o ambas son inversas en π.

Si la terna dada semirrecta, semiplano, semiespacio, y la terna imagen de ella indican la misma orientación para el espacio, entonces la t.sr. es también una t.r. Diremos que la t.sr. es **directa en el**

espacio. Cuando indican orientaciones contrarias la t.sr. no es una t.r. Diremos que la t.sr. invierte la orientación o que es **inversa en el espacio**.

Naturalmente la composición de dos transformaciones pseudo-rígidas es siempre una t.sr; y en particular, la composición de dos t.sr. inversas en el espacio es una t.r.

Todas las t.r. son ejemplos de transformaciones pseudo-rígidas, pero el recíproco no es cierto como veremos a continuación.

Nota. Algunos autores, llaman t.r. a cualquier pseudo-rígida y luego distinguen las t.r. que preservan la orientación del espacio de las que la invierten.

Simetría central en el espacio

Se llama **simetría central del espacio de centro** O a la transformación μ que transforma O en O y a cualquier otro punto Q en Q' tal que O es punto medio de $\overline{QQ'}$.

Es fácil convencerse de que la simetría central en el espacio es una transformación biyectiva, involutiva, en la que todas las rectas que pasan por O son estables, y todos los planos que pasan por O son estables.

Su restricción a cualquier plano π que contenga a O coincide con la restricción de la simetría central, en π, de centro O. En consecuencia, como tres puntos alineados cualesquiera del espacio y O siempre son coplanares, μ preserva la alineación y la relación estar entre, y transforma segmentos en segmentos congruentes.

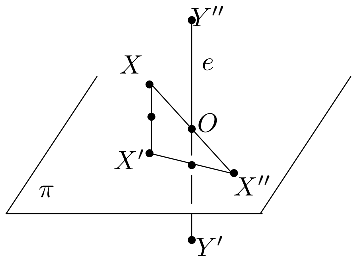
La simetría central en el espacio no preserva la orientación del espacio sino que la invierte:

Sean a, b y c tres semirrectas no coplanares de igual origen O, y pensemos en la orientación indicada por esa terna de semirrectas. Si en esa terna sustituimos dos de las semirrectas por sus opuestas, la orientación indicada por ellas no cambia. Pero sí cambia esa orientación si sustituimos a una o a las tres de las semirrectas por sus opuestas. Entonces la orientación indicada por tres semirrectas y la indicada por sus imágenes en la simetría central de todo el espacio no es la misma; es decir que la simetría central de todo el espacio no preserva la orientación del espacio, y por lo tanto no es una transformación rígida.

Simetría especular o reflexión

Dado un plano π se llama **simetría especular** o **reflexión** respecto de π a una transformación que deja fijo cada punto de π y a cualquier otro punto Q que no pertenezca a π lo transforma en Q' tal que el plano π es mediatriz del segmento $\overline{QQ'}$.

Es fácil verificar que la simetría especular σ_π respecto de un plano π se puede expresar como composición, en cualquier orden de una simetría axial σ_e y de una simetría central σ_O de todo el espacio, donde O es un punto cualquiera de π y e es la recta perpendicular a π por O.



Por lo tanto es una transformación pseudo-rígida que invierte la orientación, y no es una t.r.

También la simetría especular es una transformación involutiva.

El calificativo de "especular" se debe a que esta transformación es la que permite relacionar a un objeto con su imagen, en relación a un espejo plano que ocupe una porción del plano π.

Sabemos que cualquier t.r. admite al menos una recta estable. Para las t.sr. inversas podemos asegurar la existencia de algún plano estable.

Lema. (1 - de las t.sr. inversas) *Cualquier t.sr. que invierte la orientación tiene al menos un plano estable.*

Demostración. Sea μ la t.sr. que invierte la orientación.
En esta demostración utilizaremos t.sr. auxiliares que también invierten la orientación del espacio. Al componerlas con μ, obtendremos t.sr. que preservan la orientación. Es decir, obtendremos t.r.
Sea $A \in \Omega$ y $B = \mu(A)$.

- **Si** $A = B$ **:** • Sea σ_A la simetría central en el espacio de centro A y ρ la t.r. composición de μ con σ_A. Se cumple que

$$\rho = \sigma_A \circ \mu, \qquad \mu = (\sigma_A)^{-1} \circ \rho = \sigma_A \circ \rho,$$

y también

$$\rho(A) = (\sigma_A \circ \mu)(A) = \sigma_A(\mu(A)) = \sigma_A(A) = A.$$

Es decir que ρ, que es una t.r. con A como punto fijo, es una rotación cuyo eje pasa por A. Sea e el eje de esta rotación ρ, π el plano por A perpendicular a e, y σ_π la reflexión respecto del plano π. Se cumple

$$\mu(\pi) = (\sigma_A \circ \rho)(\pi) = \sigma_A(\rho(\pi)) = \sigma_A(\pi) = \pi.$$

Es decir que π es estable en μ.

- **Si** $A \neq B$ **:** • Sea π el plano mediatriz de $\overline{AB}$; π pasa por el punto medio M del segmento. Sea σ_π la reflexión respecto de π, y ρ la composición de μ con σ_π. Se cumple que

$$\rho = \sigma_\pi \circ \mu, \qquad \mu = (\sigma_\pi)^{-1} \circ \rho = \sigma_\pi \circ \rho,$$

y también

$$\rho(A) = (\sigma_\pi \circ \mu)(A) = \sigma_\pi(\mu(A)) = \sigma_\pi(B) = A.$$

Es decir que ρ, que es una t.r. con A como punto fijo, es una rotación cuyo eje pasa por A. Sea e el eje de esa rotación.

  - **Si** $e \parallel \pi$ **:** • , entonces el plano π' que pasa por M y es perpendicular a e es también perpendicular a π por lo cual:

$$\mu(\pi') = (\sigma_\pi \circ \rho)(\pi') = \sigma_\pi(\rho(\pi')) = \sigma_\pi(\pi') = \pi'.$$

  Así que π' es estable en μ.

  - **Si** $e \not\parallel \pi$ **:** • Existirá un punto P tal que

$$\{P\} = \pi \cap e, \qquad \mu(P) = (\sigma_\pi \circ \rho)(P) = \sigma_\pi(\rho(P)) = \sigma_\pi(P) = P.$$

  Así que P es un punto fijo de μ. Podemos utilizar el caso anterior llamando A a P. ∎

Lema. (2 - Sobre las t.sr. inversas) *Si μ es una t.sr. inversa en el espacio en la que π es un plano estable, entonces existe una t.r. η (η se lee "eta") en la que también es π estable, tal que, llamando σ_π a la simetría especular respecto de π, se cumple:*

$$\mu = \sigma_\pi \circ \eta = \eta \circ \sigma_\pi.$$

Demostración. Para que se satisfaga la primera de las igualdades anteriores debemos definir

$$\eta = (\sigma_\pi)^{-1} \circ \mu = \sigma_\pi \circ \mu;$$

Con eso es suficiente para que se cumpla $\mu = \sigma_\pi \circ \eta$; sólo queda por probar que $\mu = \eta \circ \sigma_\pi$, lo que equivale a mostrar que ambas t.b. actúan del mismo modo sobre cualquier punto de Ω. A esos efectos es muy importante verificar que el plano π es estable no sólo en μ sino también en σ_π y en η.

- Si $X \in \pi$, por la definición de η, y porque $X' = \mu(X) \in \pi$, se cumple que

$$\eta(X) = \sigma_\pi(\mu(X)) = \mu(X) = X'.$$

  Por lo tanto,

$$\sigma_\pi(\eta(X)) = \sigma_\pi(\mu(X)) = \mu(X); \qquad \eta(\sigma_\pi(X)) = \eta(X) = \mu(X).$$

  Es decir las restricciones de μ y de η al plano π coinciden. Además, por ser μ una t.sr. inversa en el espacio y la η una directa en el espacio, resultará que las imágenes del semiespacio ϵ por μ y por η son semiespacios opuestos.

- Si $Y \notin \pi$, llamemos ϵ al semiespacio de borde π que contiene a Y; X al pie de la perpendicular desde Y a π; y Z al simétrico de Y respecto del plano π, es decir, $Z = \sigma_\pi(Y)$. Llamemos además:

$$\begin{array}{r|c} Y' = \mu(Y) & Y'' = \eta(Y) \\ X' = \mu(X) & X'' = X' = \eta(X) \\ Z' = \mu(Z) & Z'' = \eta(Z) \end{array}$$

- Como las t.sr. preservan la alineación, la relación estar entre y transforman segmentos en otros congruentes, y X es el punto medio de $\overline{YZ}$ ocurrirá también que $X'' = X'$ será punto medio de $\overline{Y''Z''}$.

- Como las t.sr. además de lo anterior preservan la perpendicularidad a partir de $\overline{YX} \perp \pi$, llegamos, trabajando con μ a:
$$\overline{Y'X'} \perp \pi, \qquad \overline{Y'X'} \equiv \overline{YX}, \qquad Y' \in \mu(\epsilon);$$
y trabajando con η a:
$$\overline{Y''X'} \perp \pi, \qquad \overline{Y''X'} \equiv \overline{YX}, \qquad Y'' \in \eta(\epsilon);$$
Resultará que X' también es punto medio de $\overline{Y'Y''}$, con π plano mediatriz de $\overline{Y'Y''}$. Es decir Y'' e Y' son correspondientes en σ_π, y por lo tanto $Y' = Z''$. Por lo tanto:
$$\sigma_\pi(\eta(Y)) = \sigma_\pi(Y'') = Y'$$
$$\eta(\sigma_\pi(Y)) = \eta(Z) = Z'' = Y'$$
Así que para cualquier punto Y fuera de π también vale que
$$\sigma_\pi(\eta(Y)) = \eta(\sigma_\pi(Y))$$
por lo que $\mu = \sigma_\pi \circ \eta = \eta\sigma_\pi$. ∎

Teorema. *Cualquier t.sr. μ que invierte la orientación del espacio es una composición, en cualquier orden, de una reflexión σ_π respecto de un plano π estable en μ y una t.r. η directa en π.*

Demostración. Por el último lema, hay al menos un plano π' estable en μ. Y por el primero de los lemas, se puede expresar
$$\mu = \sigma'_\pi \circ \eta' = \eta' \circ \sigma'_\pi$$

- **Si μ es directa en π' :** • Entonces también η' lo es y $\pi' = \pi$ y $\eta = \eta'$ cumplen lo pedido.
- **Si μ es inversa en π' :** • Encontraremos otro plano π, perpendicular a π, que también es estable en μ y otra t.r. η que satisfacen lo pedido.
Por ser η' inversa en π', existirá una recta $r_o \subset \pi'$ en la que η' es estable; y el orden en r es preservado. También será estable esa recta, y su orden preservado, en σ'_π. Sea π el plano perpendicular a π' que incluye a r_o. π será estable tanto en η como en σ'_π. Por lo tanto,
$$\mu(\pi) = \sigma'_\pi(\eta'(\pi)) = \sigma'_\pi(\pi) = \pi.$$
Es decir también π es estable en μ. Y veremos que μ es directa en π:
Sea r una semirrecta incluida en r_o, $r' = \mu(r)$. Se cumplirá también $r' \subset (r)$, y r y r' de igual sentido
Sea ϵ uno de los semiespacios de borde π' y ϵ' el semiespacio opuesto. Sea β el semiplano de borde r_o tal que $\beta \subset \epsilon$. Como μ es una t.sr. inversa en el espacio, e inversa en π' deberá ocurrir $\mu(\epsilon) = \epsilon$. En consecuencia $\mu(\beta) \subset \epsilon$, es decir $\mu(\beta) = \beta$. Por lo tanto μ es directa en π. ∎

Clasificación de las transformaciones pseudo rígidas inversas

A las t.sr. inversas en el espacio podemos clasificarlas de acuerdo a las características de la t.r. η que aparece en el teorema anterior.
$$\mu = \sigma_\pi \circ \eta,$$
con π estable en μ y σ_π simetría especular o reflexión respecto de π.

- η es la identidad: μ es una reflexión respecto del plano π.
- η es una traslación no nula de trazas paralelas a π: Llamaremos a μ **reflexión deslizante**.
- η es una rotación no nula, tendrá su eje perpendicular a π: Llamaremos a μ **reflexión rotante**.

10. Clasificación de las transformaciones pseudo rígidas

$$\text{transformaciones pseudo-rígidas} \begin{cases} \text{t.sr directas, o t.r.} \begin{cases} \text{identidad} \\ \text{traslación no nula} \\ \text{rotación de ángulo no nulo ni llano} \\ \text{simetría axial} \\ \text{simetría deslizante} \\ \text{movimiento helicoidal propiamente dicho} \end{cases} \\ \text{t.sr. inversas} \begin{cases} \text{reflexión} \\ \text{reflexión deslizante} \\ \text{reflexión rotante de ángulo no llano} \\ \text{simetría central en el espacio} \\ \quad \text{o reflexión rotante de ángulo llano} \end{cases} \end{cases}$$

Cuadro IX.2: Elementos estables en t.sr.

TRANSFORMACIONES RÍGIDAS o PSEUDO-RÍGIDAS DIRECTAS

Identificación	Puntos fijos	Rectas estables	Se preserva su orden	Planos estables	Se preserva su orientación
Identidad	Todos	Todas	SI	Todos	SI
Traslación no nula, guía d	Ninguno	Las paralelas a d	SI	Los paralelos a d	SI
Rotación no nula ni de ángulo llano, eje e	Los de la recta e	e	SI	Los perpendiculares a e	SI
Rotación de ángulo llano, eje e. Simetría de eje e. Simetría central en planos perpendiculares a e	Los de e	Las perpendiculares a e (ortogonales y concurrentes)	NO	Los perpendiculares a e	SI
				Los que incluyen a e	NO
Movimiento helicoidal de eje e y ángulo no nulo ni llano	Ninguno	e	SI	Ninguno	
Movimiento helicoidal de eje e y ángulo llano; simetría deslizante en planos que incluyen a e	Ninguno	e	SI	Los que incluyen a e	NO

TRANSFORMACIONES PSEUDO-RÍGIDAS INVERSAS

Identificación	Puntos fijos	Rectas estables	Se preserva su orden	Planos estables	Se preserva su orientación
Reflexión respecto de plano π	Los de π	Las de π	SI	π	SI
Reflexión deslizante respecto de π, dirección d	Ninguno	Las de π paralelas a d	SI	π	SI
				Los perpendiculares a π y paralelos a d	NO
Reflexión rotante respecto de π de eje e,$\{O\} = \pi \cap e$, ángulo no llano	Punto O	recta e	NO	Plano π	SI
Reflexión rotante respecto de π de eje e,$\{O\} = \pi \cap e$, ángulo llano. Simetría central, en el espacio, de centro O	O	Las que pasan por O	NO	Los que pasan por O	SI

Capítulo X

Homotecias y Semejanzas

1. Introducción

Multiplicando segmentos por un racional

Ya le hemos dado un significado a que un segmento sea suma de otros dos; o a que un segmento sea menor que otro. (Ver págs. 55, 52).

Podemos definir también qué se entiende porque un segmento sea k-veces otro, donde k es un número racional.

Definiciones. Sea k un número racional positivo. Diremos que el segmento $\overline{AB}$ es **k-veces el segmento** $\overline{CD}$ si se cumple:

- para $k = 0$, $\overline{AB}$ es un segmento nulo, es decir $A = B$.
- para $k = 1$, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$
- para $k = n \in \mathbf{N}$, con $n > 1$, $\overline{AB}$ es suma de n veces el segmento $\overline{CD}$.
- para $k = 1/n$, con $n \in \mathbf{N}$ y $n > 1$, $\overline{CD}$ es suma de n veces el segmento $\overline{AB}$.
- para $k = m/n$, con $m, n \in \mathbf{N}$, $m > 1$ y $n > 1$, existe un segmento $\overline{EF}$ tal que
  $\overline{CD}$ es suma de n veces $\overline{EF}$
  $\overline{AB}$ es suma de m veces $\overline{EF}$

Frecuentemente sustituimos la expresión k-veces por otras: por ejemplo,

- para $k = 2$ por **doble**;
- para $k = 3$ por **triple**;
- para $k = 1/2$ por **mitad**; para $k = 1/3$ por **tercera parte**;
- para $k = 1/n$, con n natural, **n-ava parte** o o **n-ésima parte**;
- si sabemos que un segmento es n veces otro, con n cualquier número natural, podemos decir que el primer segmento es **múltiplo** del segundo, y que el segundo segmento es **submúltiplo** del primero.

Se cumple que

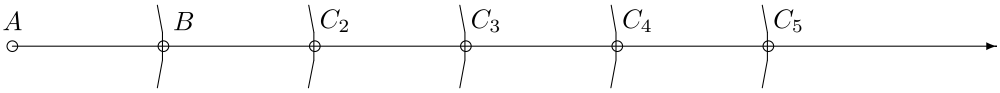
$$\begin{array}{rccc}
\text{Si} & \overline{AB} & \text{es } k_1\text{-veces} & \overline{CD}, \\
\text{y} & \overline{CD} & \text{es } k_2\text{-veces} & \overline{EF} \\
\text{entonces} & \overline{AB} & \text{es } (k_1k_2)\text{-veces} & \overline{EF}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
\text{Si} & \overline{CD} & \text{es } k_1\text{-veces} & \overline{PQ}, \\
 & \overline{EF} & \text{es } k_2\text{-veces} & \overline{PQ}, \\
\text{y} & \overline{AB} & \text{es suma de} & \overline{CD} \text{ y } \overline{EF}, \\
\text{entonces} & \overline{AB} & \text{es } (k_1+k_2)\text{-veces} & \overline{PQ}.
\end{array}$$

Dado un segmento y un racional positivo, es posible encontrar otros segmentos que sean k-veces el primero. Y todos los que lo cumplan serán congruentes entre sí.

Múltiplos de un segmento

Usando reiteradamente el transporte de segmentos, es posible obtener un segmento que sea suma de n veces otro para cualquier n natural, tal como sugiere la ilustración siguiente para $n = 5$.



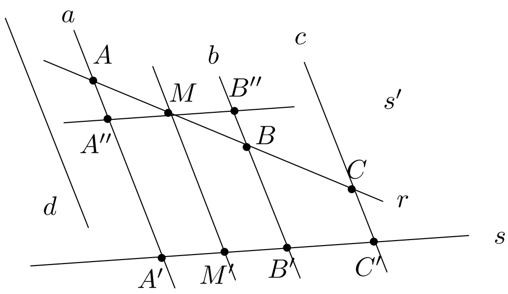
$\overline{AC_5}$ es suma de 5 veces $\overline{AB}$

si $\overline{BC_2} \equiv \overline{AB}$ y $\overline{AC_2}$ es suma de $\overline{AB}$ y $\overline{BC_2}$, entonces $\overline{AC_2}$ es suma de $\overline{AB}$ y $\overline{AB}$, es decir es suma de dos veces $\overline{AB}$.

y si para algún i natural, $\overline{AC_i}$ es suma de i veces $\overline{AB}$ y $\overline{AC_{i+1}}$ es suma de $\overline{AC_i}$ y $\overline{AB}$ entonces $\overline{AC_{i+1}}$ es suma de $i+1$ veces $\overline{AB}$.

2. Proyección paralela

Definición. Dadas las rectas coplanares en π, r, s y d, con $r \not\parallel d$ y $s \not\parallel d$, se llama proyección de r sobre s, paralela a d, a una aplicación o función que asigna a cada punto P de r un punto P' de la recta s que se obtiene cortando la paralela a d por P con s.



En la ilustración, se ha llamado A' a la imagen de A, B' a la imagen de B, etc.

Propiedades de la proyección paralela

Algunas propiedades de la proyección de r sobre s paralela a d, en las condiciones dadas en la definición:

(a). *Es biyectiva*

(b). *Se preserva la relación estar entre: Si B está entre A y C, todos ellos de la recta r entonces, con sus imágenes en la proyección, también se cumple que B' está entre A' y C'.* Sean a, b y c las paralelas a d por A, B y C respectivamente. Como $b \cap a = \emptyset$ y $b \cap c = \emptyset$, A y A' están a un mismo lado de b, y C y C' están a un mismo lado de b; entonces, como A y C están a distinto lado de b también estarán a distinto lado de b, A' y C'.

(c). *Se preserva el que un punto sea punto medio de un segmento.* Sea M punto medio de $\overline{AB}$, y M' la proyección de M. Por la propiedad anterior, seguramente $M' \in \overline{A'B'}$.

• Si s fuera paralela a r tendríamos $\overline{AM} \equiv \overline{A'M'}$ y $\overline{MB} \equiv \overline{M'B'}$, con lo que concluiríamos M' es punto medio de $\overline{A'B'}$.

• si $s \not\parallel r$: sea s' la paralela a s por M; $A'' \in s' \cap a$ y $B'' \in s' \cap b$. Los triángulos $\overset{\triangle}{AA''M}$ y $\overset{\triangle}{BB''M}$ resultan congruentes por el criterio A-L-A, ya que:

$\widehat{A''AM} \equiv \widehat{B''BM}$ por ser alternos internos respecto de las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AA''}$ y $\overleftrightarrow{BB''}$ y la transversal $\overleftrightarrow{AB}$.
$\widehat{AMA''} \equiv \widehat{BMB''}$ por ser opuestos por el vértice.
$\overline{AM} \equiv \overline{MB}$, por hipótesis.

Por lo tanto, $\overline{A''M} \equiv \overline{MB''}$.

Como $s' \parallel s$, también $\overline{A''M} \equiv \overline{A'M'}$, $\overline{B''M} \equiv \overline{B'M'}$.

En consecuencia, $\overline{A'M'} \equiv \overline{B'M'}$.

En ambos casos, M' es punto medio de $\overline{A'B'}$.

División de un segmento en varios congruentes

Dado un segmento es posible, usando transporte de segmentos y rectas paralelas, “partir” el segmento en varios congruentes, y encontrar, de ese modo, submúltiplos del segmento dado.

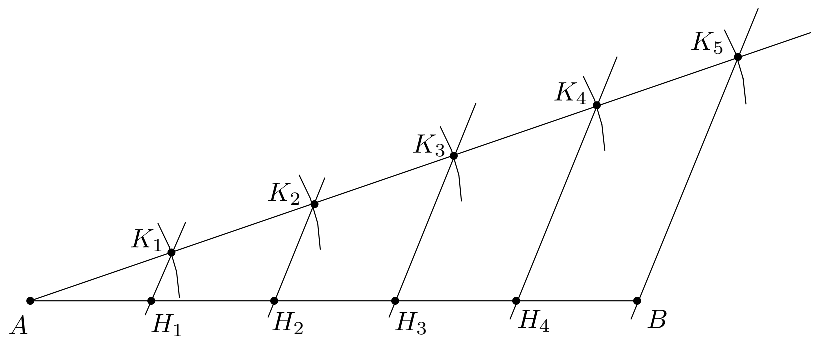
Dividir un segmento $\overline{AB}$ en n partes, con n un natural mayor que 1, significa determinar puntos H_1, H_2, …, H_{n-1} tales que junto con $H_0 = A$ y $H_n = B$ cumplan:

$$\overline{H_{i-1}H_i} \equiv \overline{H_iH_{i+1}}, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n-1$$

El segmento $\overline{AH_1}$ será una n-ésima parte del segmento $\overline{AB}$.

Veamos como conseguir esos puntos. (La ilustración siguiente muestra la construcción para $n = 5$)

Se elige una semirrecta de origen A, no colineal con $\overline{AB}$, y un punto K_1 de esa semirrecta que sea distinto de A. Se transporta el segmento $\overline{AK_1}$ $n-1$ veces más, como sugiere la figura, obteniéndose K_2, …, K_n. Las paralelas a $\overleftrightarrow{K_nB}$ que pasan por los puntos K_i, para i entre 1 y $n-1$, cortan al segmento $\overline{AB}$ en los puntos k_i deseados:



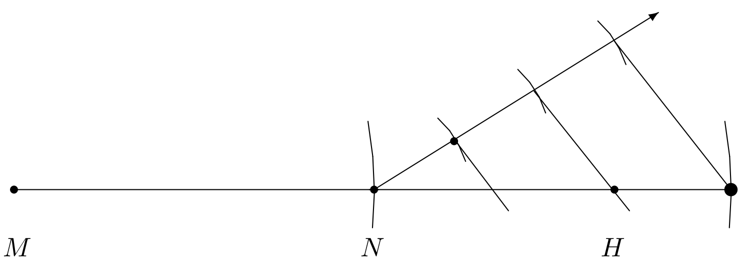
$$\overline{AH_1} \equiv \overline{H_1H_2} \equiv \overline{H_2H_3} \equiv \overline{H_3H_4} \equiv \overline{H_4B}$$

La justificación de que los puntos H_i cumplen lo deseado se puede hacer aplicando la propiedad (c) de la proyección paralela definida anteriormente: Como K_1 es el punto medio de $\overline{AK_2}$, también será H_1 punto medio de $\overline{AH_2}$, etc.

Construcción de segmento k-veces otro, con k racional positivo

Se consigue combinando adecuadamente (¡y frecuentemente hay varios modos igualmente simples!), los dos métodos anteriores.

Por ejemplo para conseguir un segmento $\overline{RS}$ que sea 5/3-veces un segmento dado $\overline{MN}$, podemos aplicar directamente la definición, que equivale a utilizar que $5/3 = 5 \cdot (1/3)$, o que $5/3 = (1/3) \cdot 5$, o que $5/3 = 1 + 2/3$. Se ha ilustrado como conseguir uno congruente con $\overline{RS}$, utilizando la última expresión.



$\overline{MH}$ que es 5/3-veces el segmento $\overline{MN}$

Medida de segmentos

El arte de medir longitudes de segmentos se ha desarrollado desde hace más de veinte siglos. El objetivo de medir segmentos es asignar un número a cada uno de los segmentos, de modo que se cumplan algunas propiedades. Por ejemplo, los segmentos congruentes deben recibir el mismo número; un segmento menor (pág. 52) que otro deberá recibir, como medida, un número menor que el otro; si un segmento es suma (pág. 55) de otros dos, debe recibir como medida la suma de las medidas de los otros dos.

Parece posible elegir un segmento no nulo $\overline{OU}$, con $O \neq U$, al que llamaríamos **segmento unidad** medida, y si otro segmento es k-veces el segmento unidad asignar el número k como medida de ese segmento.

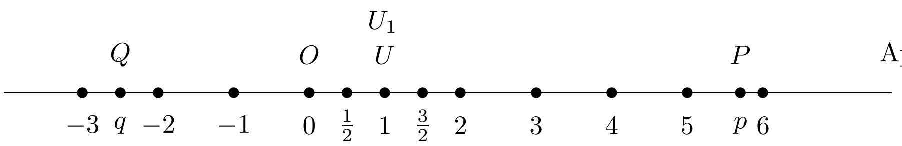
Todas las medidas de segmentos serían positivas (o nula para el segmento nulo).

Se entiende, rápidamente, que los números naturales no alcanzan para asignar medidas a todos los segmentos, ya que el natural n sólo se puede asignar a los segmentos que son suma de n veces el segmento unidad. Se acepta que, dado un segmento cualquiera, aunque no haya ningún n que sirva como medida de ese segmento, al menos habrá algún n tal que un segmento que sea suma de n veces el segmento unidad, sea mayor que el segmento dado. (Propiedad de Arquímedes); así que para cualquier segmento podremos encontrar un entero positivo m tal que el segmento dado sea mayor o igual que uno que es m veces el segmento unidad, y es menor que otro que es $m+1$ veces el segmento unidad.

Los números fraccionarios ayudan bastante para mejorar la situación: a muchísimos segmentos podremos asignarles una medida; quizás a suficientes segmentos para muchas aplicaciones; sin embargo con esto no cubriremos a todos los segmentos: por ejemplo, se justifica que ningún racional sirve como medida de un segmento que sea diagonal de un cuadrado de lado congruente al segmento unidad (necesitaríamos el irracional $\sqrt{2}$).

Sistemas de abscisas racionales

Con la posibilidad de medir muchos aunque no todos los segmentos, podemos elegir como unidad un segmento de extremos O y U, con $O \neq U$ y asignarle a algunos, muchísimos, puntos P de la semirrecta abierta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OU}}$ un racional positivo, que llamaremos **abscisa de** P; concretamente si sucede que $\overline{OP}$ es k-veces el segmento unidad, entonces le asignamos como abscisa a P el número k, que será positivo. Y a algunos, muchísimos puntos Q de la semirrecta abierta opuesta un racional negativo; la abscisa de Q; concretamente si $\overline{OQ}$ es k-veces el segmento unidad, entonces le asignamos a Q como abscisa el racional negativo $-k$. Al punto O le asignamos abscisa 0. En la ilustración hemos destacado algunos puntos indicando la abscisa correspondiente.



Aproximadamente:
$p = 5{,}7$
$q = -2{,}5$

Llamando U_i al punto de abscisa i, se cumple:

- U_1 coincide con U.
- $\overline{OU_2}$ es suma de $\overline{OU}$ y $\overline{OU_1}$, con U_1 entre O y U_2.
- $\overline{OU_3}$ es suma de $\overline{OU_2}$ y $\overline{OU_1}$, con U_2 entre U_1 y U_3.
- y en general, $\overline{OU_{i+2}}$ es suma de $\overline{OU_{i+1}}$ y $\overline{OU}$, con U_i entre U_{i-1} y U_{i+1}, para $i = 2, 3, \ldots$.
- $\overline{OU_1} = \overline{OU}$ es suma de dos veces el segmento $\overline{OU_{\frac{1}{2}}}$, con $U_{\frac{1}{2}}$ entre O y U.
- O es punto medio del segmento $\overline{U_{-1}U} = \overline{U_{-1}U_1}$; es punto medio de $\overline{U_{-2}U_2}$ y en general de $\overline{U_{-a}U_a}$.

En cada segmento de la recta $\overleftrightarrow{OU}$ hay infinitos puntos que reciben una abscisa; por ejemplo, al dividir el segmento $\overline{OU}$ en n partes obtenemos $n-1$ puntos interiores de ese segmento con abscisa $1/n$, $2/n$, …, $(n-1)/n$; y n puede tomarse arbitrariamente grande. Pero se comprueba (ya los matemáticos griegos de la antigüedad lo hicieron) que en esas condiciones quedan puntos a los que no se les ha asignado una abscisa; por ejemplo el P tal que $\overline{OP}$ sea congruente con la diagonal de un cuadrado construido sobre $\overline{OU}$. Los griegos decían que el lado y la diagonal de un cuadrado son “inconmensurables”.

Para algunas aplicaciones puede no ser importante conocer las medidas exactas de los segmentos; supongamos que se quiere construir un cuadrado, de 1 dm de lado, con una de sus diagonales incorporadas; y se quiere hacer la construcción con varillas de madera; el saber que la diagonal mide más de $\frac{141}{100}$ dm y menos de $\frac{142}{100}$ dm, será suficiente para la construcción; ni siquiera se podría sacar provecho de saber mucho más; por ejemplo saber que mide más de $\frac{1414}{1000}$ dm y menos de $\frac{1415}{1000}$ dm.

Sin embargo, para los estudios teóricos, e incluso para la etapa de diseño de las aplicaciones, es muy conveniente pensar que es posible asignarle una medida a cualquier segmento, y que esa medida será un número real positivo. Por ejemplo la diagonal mencionada recibirá como medida el irracional $\sqrt{2}$.

Los axiomas aceptados en el curso hasta el momento, no nos permiten asegurar la posibilidad de medir a cualquier segmento; ni siquiera nos permiten asegurar la mencionada propiedad de Arquímedes, que nos ayudaría a conseguir buenas aproximaciones a la medida de los segmentos.

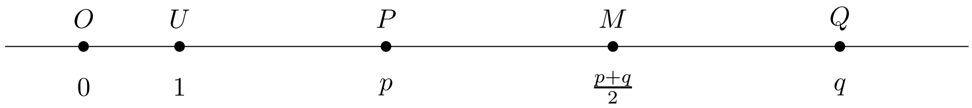
Remediaremos esta cuestión adoptando un último axioma, que llamaremos de continuidad, y que establece una conexión sumamente importante entre el espacio geométrico y los números reales.

Nota. Los números reales pueden ser "construidos" o "definidos" a partir de los números naturales sin hacer referencia en absoluto a los puntos de una recta, aunque, seguramente, los puntos de una recta sirvieron de inspiración a los matemáticos para hacer esa construcción. Para este curso supondremos que conocemos "bien" a los números reales, por lo que incorporar el axioma de continuidad será de mucha utilidad.

3. Sistemas de abscisas reales. Longitudes, distancias

Axioma 12 (Continuidad) *Dados dos puntos distintos O y U, existe una única correspondencia biyectiva entre el conjunto de puntos de la recta $\overleftrightarrow{OU}$ y el conjunto de los números reales que cumple las siguientes condiciones:*

- *Al punto O le corresponde el real 0.*
- *Al punto U le corresponde el real 1.*
- *La correspondencia preserva la relación estar entre; es decir a un punto que está entre otros dos puntos dados le corresponde un real que está entre los reales correspondientes a los dos puntos dados.*
- *Al punto medio de un segmento le corresponde la semisuma de los reales correspondientes a los extremos del segmento.*



Definición. Dados dos puntos O y U, la función cuya existencia está asegurada por el axioma anterior, se llama **sistema de abscisas asociado al par ordenado** (O, U). El punto O se llama **punto origen** y el punto U se llama **punto unidad**.

Nota. Se suele usar nombres como "x", "y","z"para este tipo de funciones. No confundir este uso de esas letras con el más habitual en el que representan incógnitas, números reales ...

LLamando x al sistema de abscisas asociado a $\overleftrightarrow{OU}$, x es una función con dominio $\overleftrightarrow{OU}$ y codominio $\mathbf{R}$: $x : \overleftrightarrow{OU} \to \mathbf{R}$. Se cumple:
- $x(0) = 0$; $x(U) = 1$;
- Si $R \in \overline{PQ}$, entonces, $x(P) < x(R) < x(Q)$ o $x(P) > x(R) > x(Q)$.
- Si M es punto medio de $\overline{PQ}$, entonces, $x(M) = 1/2(x(P) + x(Q))$.

Como consecuencia inmediata del axioma tenemos:

- *Todos los puntos de la semirrecta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OU}}$ tienen abscisas positivas; y todos los de la semirrecta opuesta tienen abscisas negativas.*
- *Si $x(A) = -x(B)$ entonces O es punto medio de $\overline{AB}$.*

Cada sistema de abscisas se puede ilustrar mediante una **escala de medidas**: como la de pág. 118: una recta con varios de su puntos destacados, entre ellos el punto origen y el punto unidad; y cada uno de esos puntos va acompañado de la indicación de su abscisa. El nombre "escala de medidas" se refiere a que, según veremos, sirven para visualizar la medida de los segmentos.

Desde el punto de vista práctico, las reglas graduadas muestran, en parte, un sistema de abscisas. No nos preocupa, por ahora, cómo pueden fabricarse esas reglas.

Lema. (Generación de otros sistemas de abscisas) *Dado un sistema de abscisas x asociado al par (O, U), con O, U puntos distintos de una recta r, y dos reales a y b, con $b \neq 0$, la función z con dominio la recta r y codominio $\mathbf{R}$, dada por*

$$z(P) = \frac{x(P) + a}{b} \tag{1}$$

es un sistema de abscisas.

Demostración.

- Se verifica que z preserva la relación estar entre ya que x lo hace; pues si P_2 está entre P_1 y P_3 y se cumple que, por ejemplo,

$$\begin{array}{rccc}
 & x(P_1) < & x(P_2) & < x(P_3) \\
\text{sumando } a \text{ a todos los miembros:} & x(P_1)+a < & x(P_2)+a & < x(P_3)+a \\
\text{dividiendo por } b, & & & \\
\bullet \ \text{si } b>0: & \dfrac{x(P_1)+a}{b} < & \dfrac{x(P_2)+a}{b} & < \dfrac{x(P_3)+a}{b}, \\
\text{es decir:} & z(P_1) < & z(P_2) & < z(P_3) \\
\bullet \ \text{si } b<0: & \dfrac{x(P_1)+a}{b} > & \dfrac{x(P_2)+a}{b} & > \dfrac{x(P_3)+a}{b}, \\
\text{es decir:} & z(P_1) > & z(P_2) & > z(P_3)
\end{array}$$

  por lo que, en cualquiera de los casos, $z(P_2)$ estará entre $z(P_1)$ y $z(P_3)$.

- También la función z cumple con la propiedad de los puntos medios, gracias a que x lo hace:
  Si M es punto medio de $\overline{AB}$, con $A, B \in r$, se cumplirá

$$\begin{aligned}
z(M) &= \frac{x(M)+a}{b} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(x(A)+x(B)\right)+a}{b} \\
&= \frac{x(A)+x(B)+2a}{2b} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x(A)+a}{b}+\frac{x(B)+a}{b}\right) \\
&= \frac{1}{2}(z(A)+z(B))
\end{aligned}$$

- Existe un punto O' tal que $z(O') = 0$: basta buscar el punto O' tal que $x(O') = -a$. También existe un punto U' tal que $z(U') = 1$; basta buscar el punto U' tal que $x(U') = b - a$. Tales puntos O' y U' existen pues x es sobreyectiva.
- z es una función biyectiva gracias a que x lo es.

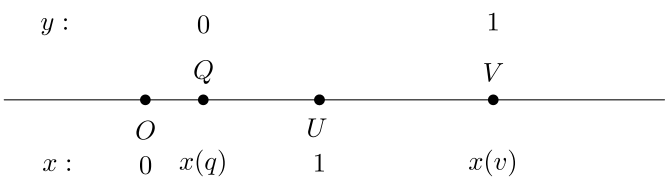
Entonces z es el sistema de abscisas en el que el punto origen es O' y punto unidad es U'. (Por el axioma de continuidad hay una única función en esas condiciones).

■

Teorema. (Cambio de sistema de abscisas) *Sean O, U, Q y V puntos alineados, con $O \neq U$ y $Q \neq V$; sea x el sistema de abscisas correspondiente a (O, U); y sea y el sistema de abscisas correspondiente a (Q, V). Entonces para todo punto P de la recta $\overleftrightarrow{OU}$ se cumple:*

$$y(P) = \frac{x(P) - x(Q)}{x(V) - x(Q)} \tag{2}$$

Demostración. Sea $x : \overleftrightarrow{OU} \to \mathbf{R}$, el sistema de abscisas asociado a (O, U), y sea $y : \overleftrightarrow{QV} \to \mathbf{R}$, el sistema de abscisas asociado a (Q, V).



- Utilizamos (1) con $a = -x(Q)$ y $b = x(V) - x(Q)$ para obtener un nuevo sistema de abscisas, z:

$$\begin{aligned}
z(P) &= \frac{x(P)+a}{b} \\
z(P) &= \frac{x(P)-x(Q)}{x(V)-x(Q)}
\end{aligned}$$

Las abscisas calculadas con la función z valen 0 y 1, respectivamente, en los puntos Q y V:

$$
\begin{aligned}
z(Q) &= \frac{x(Q)-x(Q)}{x(V)-x(Q)} = 0 \\
z(V) &= \frac{x(V)-x(Q)}{x(V)-x(Q)} = 1
\end{aligned}
$$

Así que, por el axioma de continuidad de pág. 119, las funciones z e y coincidirán en todos los puntos; es decir, se cumple (2) para cualquier punto P. ▪

Definiciones. (Longitudes. Distancias). Sea x el sistema de abscisas asociado a (O, U), con O y U puntos distintos.

- Dado un segmento $\overline{PQ}$. Llamaremos **longitud de** $\overline{PQ}$ o **medida de** $\overline{PQ}$ o **distancia entre** P **y** Q y la denotaremos con $|\overline{PQ}|$ o simplemente $|PQ|$, a $x(H)$, donde $H \in \overrightarrow{OU}$ y $\overline{OH} \equiv \overline{PQ}$. La longitud de los segmentos nulos es 0.

  En otras palabras, la longitud del segmento $\overline{PQ}$ es la abscisa del punto H que se obtiene al transportar $\overline{PQ}$ a la semirrecta $\overrightarrow{OU}$.

  En la práctica, si tenemos una regla graduada, movemos la regla hasta que su borde graduado "incluya" al segmento que se quiere medir, con el punto origen de la regla coincidiendo con P; la longitud de $\overline{PQ}$ se "lee" en la graduación de la regla correspondiente al punto Q.
- Dados una recta r y un punto P se llama **distancia de** P **a** r a la longitud del segmento $\overline{PH}$, donde H es el pie de la perpendicular desde P hasta r. Para $P \in r$, la distancia de P a r es 0.

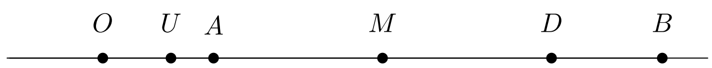
Gracias a las propiedades de las t.r. y al axioma de continuidad se verifica:

- *Dos segmentos congruentes cualesquiera tienen la misma longitud; en especial, cualquier segmento congruente con $\overline{OU}$ tendrá longitud 1.*
- *Si H tiene abscisa positiva, es decir si $x(H) > 0$, entonces, cualquier segmento congruente con $\overline{OH}$ tendrá longitud $x(H)$. Y si H tiene abscisa negativa, es decir si $x(H) < 0$, entonces, cualquier segmento congruente con $\overline{OH}$ tendrá longitud $-x(H)$. Es decir para cualquier punto H de la recta $\overleftrightarrow{OU}$ se cumple que*
  $$|OH| = |x(H)|$$

¿Podemos calcular $|AB|$, para puntos A y B alineados con O y U, a partir las abscisas de A y B? La respuesta es sí.

Proposición. *Sea x el sistema de abscisas asociado a (O, U) y sean $A, B \in \overleftrightarrow{OU}$; entonces $|AB| = |x(B) - x(A)|$.*

Demostración. Sea M punto medio de $\overline{OB}$ y σ_M la simetría central, en un plano que contenga a $\overleftrightarrow{OU}$, de centro M; sea $D = \sigma_M(A)$. $D \in \overleftrightarrow{OU}$.



σ_M envía el segmento $\overline{BA}$ a $\overline{OD}$. Por lo tanto,

$$|AB| = |OD| = |x(D)|$$

Como M es punto medio tanto del segmento $\overline{OB}$ como del $\overline{AD}$, por el axioma de continuidad, se cumplirá

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x(O) + x(B)) &= \frac{1}{2}(x(A) + x(D)) \\
x(D) &= x(B) - x(A) \\
|AB| &= |x(B) - x(A)|
\end{aligned}
$$

▪

Se justifica fácilmente, usando un sistema de abscisas adecuado, que

Corolario. *Dado un segmento de longitud 1, un número real positivo b y una semirrecta a de origen A, existe exactamente un punto B de la semirrecta a tal que el segmento $\overline{AB}$ tiene longitud b.*

La correspondencia entre reales no negativos y longitudes de segmentos posibilita que simplifiquemos nuestras expresiones y digamos por ejemplo "triángulo de lados 3, 4 y 5" o "circunferencia de radio 8" en cuenta de "triángulo cuyos lados tienen longitudes 3, 4 y 5" o "circunferencia con radio de longitud 8".

Las distancias dependen de la unidad de medida elegida

Ciertamente la longitud o medida de un segmento depende del sistema de abscisas que se utilice, la cual se visualiza con una escala de medidas.

La imagen de cualquier “escala de medidas” por una t.r. es una escala que produce las mismas longitudes. Es decir:

Sea x un sistema de abscisas asociado al par de puntos (O, U), μ una t.r. y A y B dos puntos. Entonces la longitud de $\overline{AB}$, medida en el sistema x asociado a (O, U), es la misma que la medida en el sistema de abscisas asociado a $(\mu(O), \mu(U))$.

Pero si los segmentos $\overline{OU}$ y $\overline{QV}$ no son congruentes entonces la medida de un segmento $\overline{PR}$, respecto de $\overline{OU}$ que denotaremos $|PR|_{\overline{OU}}$ y la medida del mismo segmento respecto de $\overline{QV}$, que denotaremos con $|PR|_{\overline{QV}}$ serán números distintos; por ejemplo,

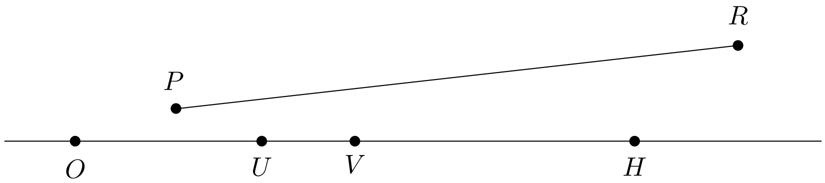
$$\text{si } \overline{OU} > \overline{QV} \text{ entonces } |PR|_{\overline{OU}} < |PR|_{\overline{QV}}.$$

Más concretamente, se cumple:

Teorema. (Cambio de unidad de medida) *Sean $\overline{OU}$, $\overline{QV}$ y $\overline{PR}$ segmentos no nulos; entonces,*

$$|PR|_{\overline{QV}} = \frac{|PR|_{\overline{OU}}}{|QV|_{\overline{OU}}}, \qquad |PR|_{\overline{OU}} = \frac{|PR|_{\overline{QV}}}{|OU|_{\overline{QV}}}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $O = Q$ y que $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OV}$.
Sea x el sistema de abscisas asociado a (O, U), e y el asociado a (O, V). Sea H el punto de $\overrightarrow{OU}$ tal que $\overline{PR} \equiv \overline{OH}$.



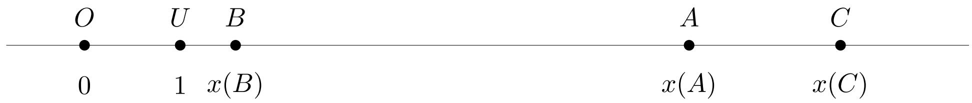
$$\begin{aligned}
|OV|_{\overline{OU}} &= x(V) \\
|PR|_{\overline{OU}} &= x(H) \\
|PR|_{\overline{OV}} &= y(H) \\
& \quad \text{por cambio de sistema de abscisas, (pág. 120):} \\
y(H) &= \frac{x(H) - x(O)}{x(V) - x(O)} = \frac{x(H)}{x(V)} \\
|PR|_{\overline{OV}} &= \frac{|PR|_{\overline{OU}}}{|OV|_{\overline{OU}}}
\end{aligned}$$

■

Naturalmente, si $\overline{OU} \equiv \overline{QV}$ entonces $|PR|_{\overline{OV}} = |PR|_{\overline{OU}}$.

Proposición. *La longitud de un segmento suma de otros dos segmentos dados es la suma de las longitudes de los segmentos dados.*

Demostración. Es suficiente que demostremos la propiedad para segmentos en las condiciones siguientes:
Sea x el sistema de abscisas asociado a (O, U); y supongamos que el segmento $\overline{OC}$ es suma de los segmentos no nulos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, con O, U, A, B y C pertenecientes a la semirrecta $\overrightarrow{OU}$; entonces $x(C) = x(A) + x(B)$.
Las abscisas de A, B y C serán positivas; y por definición de suma de segmentos debe ocurrir que B, (y también A, pero no nos importa ahora) estén entre O y C; es decir $x(c) > x(b)$; con $\overline{OA} \equiv \overline{BC}$.
Se han hecho dos ilustraciones; una con A entre O y B y otra con B entre O y A.



$$
\begin{aligned}
|OC| &= |x(C) - x(O)| = x(C) \\
|BC| &= |x(C) - x(B)| = x(C) - x(B) \\
|OA| &= |x(A) - x(O)| = x(A) \\
\overline{OA} &\equiv \overline{BC} \\
|OA| &= |BC| \\
x(A) &= x(C) - x(B) \\
x(A) + x(B) &= x(C) \\
|OA| + |OB| &= |OC|
\end{aligned}
$$

▪

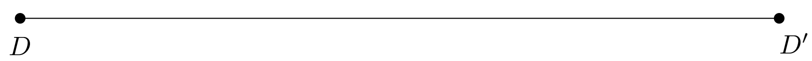
Corolario. *Si un segmento es menor que otro, la longitud del primero es menor que la longitud del segundo.*

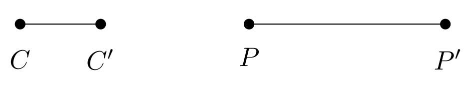
Unidades de medida

Para que sea de utilidad conocer el número que expresa la medida o longitud de un segmento, debe conocerse cuál es el segmento unidad, es decir, el segmento respecto del cual se ha medido. (O bien un segmento congruente con el segmento unidad).

Si en algunas situaciones no se menciona la unidad de medida, es porque se sobreentiende que todas las medidas de longitud se han hecho con la misma, cualquiera sea ella.

Para muchas aplicaciones, sobre todo si intervienen otro tipo de magnitudes, es conveniente mencionar la unidad utilizada del modo siguiente: junto con el número que mide la longitud o distancia, se indica por ejemplo “cm”, “dm”, “km”, “pulgada”, con lo que se dan suficientes pistas acerca del segmento unidad.





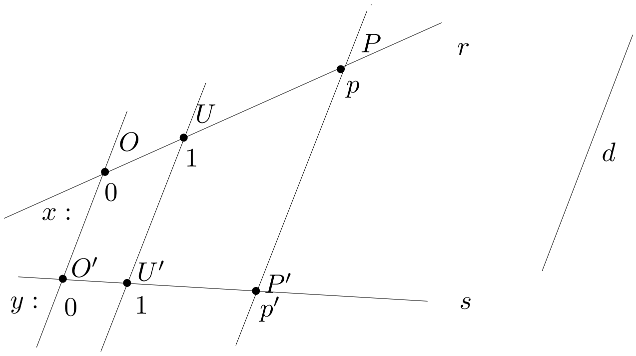
$|DD'| = 1$ dm, $|CC'| = 1$ cm, $|PP'| = 1$ pulgada

Por ejemplo, para expresar 2 dm en pulgadas, sabiendo que 1 pulgada = 2.54 cm y que 1 dm=10 cm se suele plantear:

$$2 \text{ dm } = 2 \cancel{\text{dm}} \cdot \frac{10 \cancel{\text{cm}}}{1 \cancel{\text{dm}}} \cdot \frac{1 \text{ pulgada}}{2{,}54 \cancel{\text{cm}}} = \frac{2}{2{,}54} \text{ pulgada}$$

Teorema. (Proyección paralela de un sistema de abscisas) *Sean r, s, d coplanares en π con r y s no paralelas a d. Si O y U, puntos distintos de r, se proyectan sobre s en forma paralela a d, en O' y U', entonces el sistema de abscisas asociado a (O, U) se corresponde con el asociado a (O', U') a través de dicha proyección. Concretamente, llamemos x al sistema de abscisas asociado a (O, U); y al sistema de abscisas asociado a (O', U'); P a un punto cualquiera de r; y P' a su proyección sobre r paralela a d; se cumplirá $x(P) = y(P')$.*

Demostración.



resulta $p' = p$

Consideramos la función

$$\begin{array}{rcccl} z & : & s & \rightarrow & \mathbf{R} \\ & & P' & \mapsto & x(P) \end{array},$$

donde P es el único punto de r que se proyecta, paralelamente a d, sobre P'.
La función z resulta biyectiva. Las propiedades anteriores permiten justificar que z coincide con el sistema de abscisas asociado a (O', U').
■

Valores proporcionales

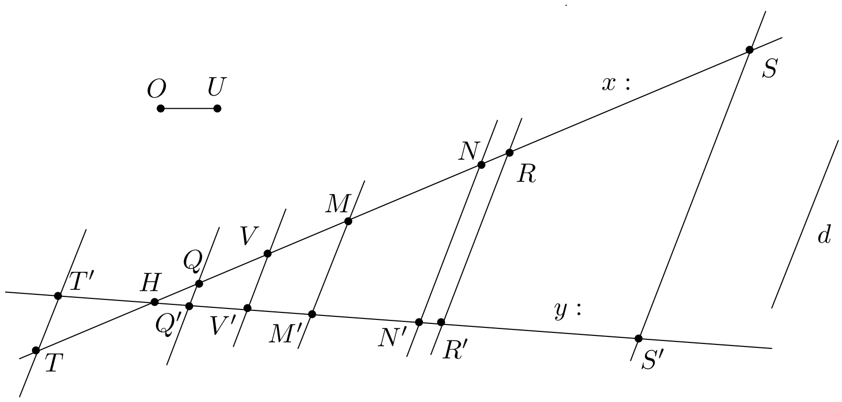
Aunque es posible dar una definición referida a magnitudes y no sólo a números, para nuestro propósito es suficiente lo siguiente:
Definición. Para $n \geq 2$, diremos que n números reales s $z_1, z_2, \ldots, z_n$, son **proporcionales** a otros n números reales $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$ si los respectivos cocientes son iguales, es decir si

$$\frac{z_1}{z'_1} = \frac{z_2}{z'_2} = \cdots = \frac{z_n}{z'_n}$$

Teorema. (Teorema de Thales) *Si dos rectas b y b' se cortan por un sistema de rectas paralelas, las longitudes de los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a las longitudes de los segmentos determinados por los puntos correspondientes de la otra.*

No hay inconveniente en suprimir la mención a las longitudes y hablar simplemente de segmentos proporcionales: que nos referimos a sus longitudes se sobreentiende. Naturalmente todas las longitudes se miden respecto del mismo segmento unitario; supongamos cierto $\overline{OU}$. En las condiciones sugeridas por la figura, el teorema asegura que:

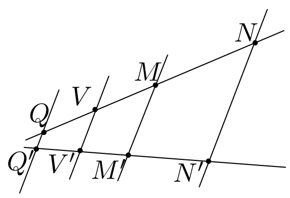
$$\frac{|MN|_{\overline{OU}}}{|M'N'|_{\overline{OU}}} = \frac{|RS|_{\overline{OU}}}{|R'S'|_{\overline{OU}}} = \frac{|HR|_{\overline{OU}}}{|HR'|_{\overline{OU}}} = \frac{|TR|_{\overline{OU}}}{|T'R'|_{\overline{OU}}} = \cdots$$



Demostraremos el teorema justificando que esos cocientes tienen un valor independiente de cuáles son los puntos de las rectas b y b' involucrados. Para ello usaremos dos sistemas de abscisas, relacionados como en el teorema anterior por proyección paralela a d: el sistema x asociado a (Q, V) y el sistema y asociado a (Q', V'), con Q' y V' imágenes de Q y V en la proyección.

Demostración.
Por el teorema anterior, para cualquier $Z \in b$ y su imagen $Z' \in b'$ se cumple que $x(Z) = y(Z')$.
Llamemos $k = |QV|_{\overline{OU}}$ y $k' = |Q'V'|_{\overline{OU}}$.

Sean M y N dos puntos distintos cualesquiera de b y M' y N' sus imágenes en la proyección. Se cumple:



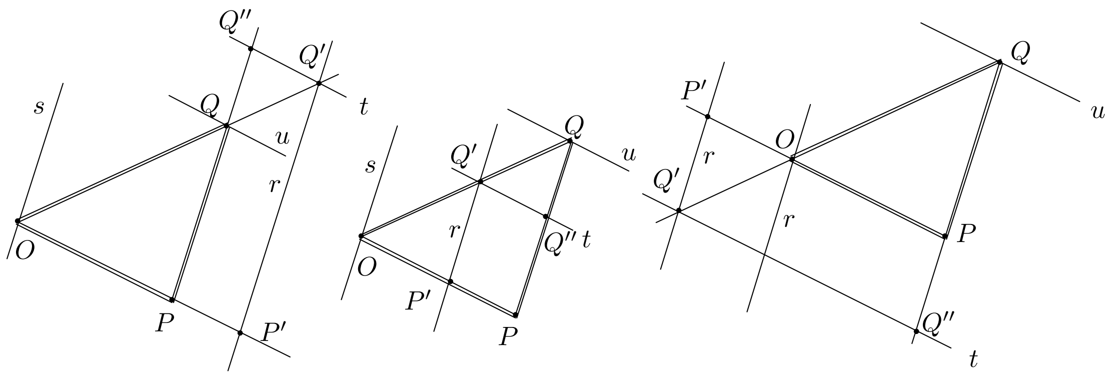
$$\begin{aligned}
|MN|_{\overline{QV}} &= |x(N) - x(M)| \\
|M'N'|_{\overline{Q'V'}} &= |y(N') - y(M')| = |x(N) - x(M)| \\
\text{Por tanto} & \\
|MN|_{\overline{QV}} &= |M'N'|_{\overline{Q'V'}} \\
\text{Por otro lado,} & \\
|MN|_{\overline{QV}} &= \frac{|MN|_{\overline{OU}}}{|QV|_{\overline{OU}}} = \frac{|MN|_{\overline{OU}}}{k} \\
|M'N'|_{\overline{Q'V'}} &= \frac{|M'N'|_{\overline{OU}}}{|Q'V'|_{\overline{OU}}} = \frac{|M'N'|_{\overline{OU}}}{k'} \\
\text{Entonces,} & \\
\frac{|MN|_{\overline{OU}}}{k} &= \frac{|M'N'|_{\overline{OU}}}{k'} \\
\text{Es decir,} & \\
\frac{|MN|_{\overline{OU}}}{|M'N'|_{\overline{OU}}} &= \frac{k}{k'}
\end{aligned}$$

Para cualquier otro par de segmentos correspondientes, por ejemplo $\overline{RS}$ y $\overline{RS'}$ de la penúltima ilustración, habríamos obtenido el mismo valor k/k'. ∎

Teorema. (De la paralela a lado de triángulo) *Cualquier recta del plano que contiene a un triángulo, que no pase por uno de sus vértices y sea paralela al lado opuesto al vértice, determina junto con las rectas que incluyen a los otros lados, otro triángulo cuyos lados son respectivamente proporcionales a los del primer triángulo. Concretamente, si el triángulo es* $\overset{\triangle}{OPQ}$ *y la recta es* r*, que no pasa por* O *cumple:* $r \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, $r \cap \overleftrightarrow{OP} = P'$, $r \cap \overleftrightarrow{OQ} = Q'$ *entonces,*

$$\frac{|OP'|}{|OP|} = \frac{|OQ'|}{|OQ|} = \frac{|P'Q'|}{|PQ|}$$

Demostración. En el caso en que $P = P'$ y consecuentemente $Q = Q'$, la demostración es trivial; veamos el otro caso.
No hay duda, gracias a la unicidad de la paralela, en cuanto a que r, que es paralela al lado $\overline{PQ}$ tiene que ser secante con las rectas que incluyen a los otros lados.
Hemos hecho tres ilustraciones pero para todas ellas vale la misma justificación.



Debemos demostrar dos igualdades:

- **Primera igualdad:** • Sea s la paralela a r por O. Por el teorema de Thales aplicado a las paralelas r, s y $\overleftrightarrow{PQ}$ cortadas por las transversales $\overleftrightarrow{OP}$ y $\overleftrightarrow{OQ}$, podemos asegurar que:

$$\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OP'|}{|OQ'|}, \qquad \text{de donde} \quad \frac{|OP'|}{|OP|} = \frac{|OQ'|}{|OQ|}$$

- **Segunda igualdad:** • Sea t la paralela a $\overleftrightarrow{OP}$ por Q'; Q'' tal que $\{Q''\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap t$; y u la paralela a t por Q. Aplicando el teorema de Thales a las paralelas t, u y $\overleftrightarrow{OP}$, con las transversales $\overleftrightarrow{OQ}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$

concluimos que:

$$\frac{|PQ|}{|OQ|} = \frac{|PQ''|}{|OQ'|}, \quad \text{de donde,} \quad \frac{|OQ'|}{|OQ|} = \frac{|PQ''|}{|PQ|} = \frac{|P'Q'|}{|PQ|}$$

La última igualdad porque P, Q'', Q' y P' son vértices de un paralelogramo, por lo que que $|PQ''| = |P'Q'|$.

En consecuencia,

$$\frac{|OP'|}{|OP|} = \frac{|OQ'|}{|OQ|} = \frac{|P'Q'|}{|PQ|}$$

■

4. Homotecia

A efectos de facilitar la comprensión del tema, definiremos por separado homotecia de razón positiva y de razón negativa. En esta sección usaremos la letra griega η (leáse "eta") para referirnos a cierta homotecia.

Definición. Homotecia de razón positiva:

Dado un punto O y un real $k > 0$ se llama **homotecia** de de **centro** O y **razón** k, a la función con dominio y codominio Ω tal que:

$$\begin{cases} \eta(O) = O, \\ \quad \text{y para cada punto } P \text{ distinto de } O, \\ \eta(P) = P' \text{, con } P' \text{ tal que} \quad P' \in \overset{\circ\!\!\longrightarrow}{OP} \text{ y } |OP'| = k|OP| \end{cases} \tag{3}$$

Insistimos en que, si estamos escribiendo $|OP|$, $|OP'|$, estamos suponiendo que medimos ambos segmentos respecto de cierta unidad de medida. Sin embargo, no importa cual sea esa unidad de medida: si tomamos otra unidad, pero la misma para ambos miembros de la última expresión de (3), el P' resultante no cambia.

Además podemos escribir indistintamente

$$|OP'| = k|OP| \quad \text{o bien} \quad |OP'|_{\overline{OP}} = k.$$

Es decir, la medida del segmento $\overline{OP'}$, respecto del segmento $\overline{OP}$, es k.

Definición. Homotecia de razón negativa:

Dado un punto O y un real $k < 0$ se llama **homotecia** de **centro** O y **razón** k a la función con dominio y codominio Ω tal que:

$$\begin{cases} \eta(O) = O, \\ \quad \text{y para cada punto } P \text{ distinto de } O, \\ \eta(P) = P' \text{,con } P' \text{ tal que} \quad \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'} sonopuesras \text{ y } |OP'| = -k|OP| \end{cases} \tag{4}$$

Recordemos que $k < 0$, con lo que $-k > 0$.

Podemos escribir indistintamente

$$|OP'| = -k|OP| \quad \text{o bien} \quad |OP'|_{\overline{OP}} = -k$$

Es posible juntar las definiciones dadas, una para $k > 0$, y otra para $k < 0$, en una sola.

Definición. Se llama **homotecia** de centro O y **razón** k, donde k es un real no nulo, a la función con dominio y codominio Ω tal que

$$\begin{cases} \eta(O) = O, \\ \quad \text{y para cada punto } P \text{ distinto de } O, \\ \eta(P) = P', \quad \text{con } P' \text{ tal que:} \\ \quad \text{si } x \text{ es el sistema de abscisas asociado a } (O, P), \quad \text{entonces } x(P') = k \end{cases} \tag{5}$$

La condición $x(P') = k$, que se refiere a un sistema de abscisas asociado a (O, P) puede cambiarse, utilizando un sistema de abscisas y asociado a (O, U) —con U cualquiera tal que $\overleftrightarrow{OU} = \overleftrightarrow{OP}$— por

$$y(P') = k\, y(P) \tag{6}$$

Con esa definición, para cualquier $k \neq 0$, resulta, como debe ser:

Para $P \neq O$, si k es positivo, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$; en cambio si k es negativo, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP'}$ son opuestas.

Nota. En la justificación del teorema de la paralela a lado de triángulo (pág. 125), aparecen dos triángulos de los que ahora podremos decir

$$O\overset{\triangle}{P'}Q' = \eta\left(O\overset{\triangle}{P}Q\right)$$

con η una homotecia de centro O y cierta razón k. La primera de aquellas ilustraciones, corresponde a un $k > 1$; la segunda a un $0 < k < 1$ y la tercera a un $-1 < k < 0$. Este teorema permitirá justificar algunas propiedades de las homotecias.

Definición. Diremos que dos conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son **homotéticos** si existe una homotecia que transforma uno en el otro. Lo denotaremos mediante $\mathcal{A} \overset{\text{hom}}{\equiv} \mathcal{B}$.

Propiedades de las homotecias

Enunciaremos algunas propiedades de las homotecias indicando, cuando sea de interés, las claves de la justificación. Sea η la homotecia de centro O y razón k, con k real no nulo. Sea P un punto de Ω con $P \neq O$.

(a). *η es una aplicación biyectiva: su inversa es precisamente la homotecia de centro O y razón $1/k$.*

(b). *Para $P \neq O$, sea $P' = \eta(P)$. Si k positivo $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}$; en cambio si $k < 0$ $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP'}$ son opuestas.*

(c). *Las rectas que pasan por O son estables en η. Si $k > 0$, el orden en esas rectas se preserva. Si $k < 0$, el orden se invierte.*

(d). *Si r es una recta entonces $\eta(r)$ también es una recta y $\eta(r) \parallel r$. Consecuentemente también la imagen de cualquier plano es un plano paralelo.*

Para r que pasa por O ya lo asegura el inciso anterior.

Para r que no pasa por O, usando el teorema de la paralela a lado de un triángulo (pág. 125), podemos considerar dos puntos P y Q de r para formar un triángulo. Si $P' = \eta(P)$, la paralela a $\overleftrightarrow{PQ}$ por P' cortará a la recta $\overleftrightarrow{OQ}$ precisamente en Q'.

(e). *La longitud del transformado de cualquier segmento es $|k|$ multiplicado por la longitud del segmento dado.*

Para segmentos de una recta por O, por las propiedades de los sistemas de abscisas.

Para segmentos de una recta que no pase por O, por el teorema de la paralela a lado de un triángulo.

(f). *Se preserva la relación estar entre. Más aún, si $k > 0$ a cada semirrecta le corresponde otra paralela y de igual sentido; y si $k < 0$, a cada semirrecta le corresponde otra paralela de sentido contrario.* Para rectas por O, por el sistema de abscisas

Para rectas que no pasan por O, porque una semirrecta interior a un ángulo corta a cualquier segmento que se apoye en ambos lados del ángulo.

(g). *Todos los planos que pasan por O son estables en η.Se preserva la orientación de cada plano que pasa por O.*

(h). *Si $k > 0$, la orientación del espacio se preserva; en cambio para $k < 0$ la orientación del espacio se invierte.* Es decir, *la orientación dada al espacio por una terna adecuada de (semirrecta, semiplano, semiespacio) y la dada por sus imágenes en la homotecia, son iguales si $k > 0$ y contrarias si $k < 0$.*

(i). *Salvo que $|k| = 1$, hay segmentos a los que les corresponde una parte propia o al revés.* Sean, por ejemplo, P y Q puntos alineados con O punto medio de $\overline{PQ}$. $\eta(\overline{PQ}) = \overline{P'Q'}$ también tiene por punto medio a O. Si $|k| > 1$ entonces $\overline{PQ} \subset \overline{P'Q'}$ y $\overline{PQ} \neq \overline{PQ}$; y si $|k| > 1$ entonces $\overline{P'Q'} \subset \overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'} \neq \overline{PQ}$.

(j). *Un ángulo y su imagen por la homotecia son congruentes.* Esos ángulos están formados por semirrectas paralelas; ambas de igual sentido si $k > 0$, y ambas de sentido contrario si $k < 0$.

(k). *La inversa de una homotecia de razón k es también una homotecia de igual centro y razón k^{-1}. La composición de homotecias de igual centro y razones k_1 y k_2 es otra homotecia del mismo centro y razón k_1k_2. En cambio la composición de homotecias de centros O_1 y O_2 con $O_1 \neq O_2$ y razones k_1 y k_2:*

- *si $k_1k_2 \neq 1$, la composición es una homotecia con centro distinto de O_1 y de O_2 y razón k_1k_2.*
- *si $k_1k_2 = 1$, la composición es una traslación.*

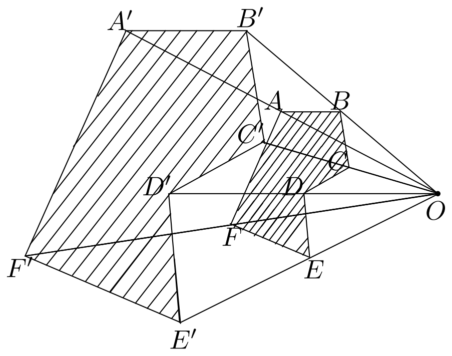
Nota. Observamos que las homotecias cumplen todas las propiedades de las t.b. ya que son t.b.; y cumplen muchas de las propiedades de las t.r.. Se deja como ejercicio para el lector distinguir entre las propiedades de las t.r., dadas en el axioma de las t.r., cuales son válidas para las homotecias y cuales no lo son.

En particular, destacamos:

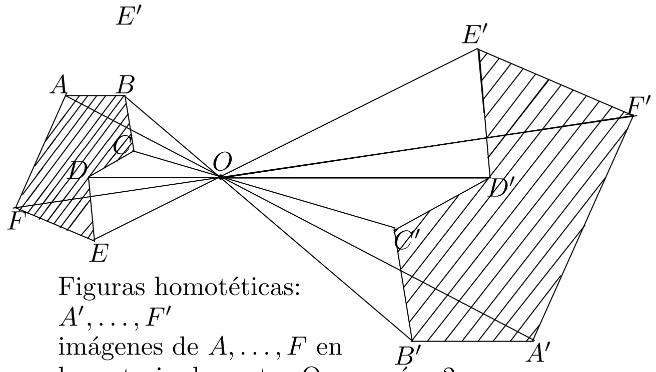
- Las homotecias de razón 1 coinciden con la transformación identidad.
- Si η es una homotecia, y A, y B puntos cualesquiera del espacio, se cumple que:

$$\eta\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\eta(A)\eta(B)}, \qquad \eta\left(\overset{\circ}{\overrightarrow{AB}}\right) = \overset{\circ}{\overrightarrow{\eta(A)\eta(B)}}, \qquad \eta\left(\overline{AB}\right) = \overline{\eta(A)\eta(B)}, \qquad \text{etc.}$$

- Si $|k| \neq 1$ las homotecias de razón k no son t.r. por la propiedad (i).
- Una homotecia de razón -1 no es una t.r. por la propiedad (h): coinciden con la simetría central de igual centro de todo el espacio, es decir es una transformación pseudo-rígida.
- La restricción de una homotecia de razón -1, a cada plano π que pasa por su centro, coincide con la restricción de la simetría central, en π, de igual centro. Pero sobre los semiespacios abiertos de borde ese plano π la homotecia y la simetría central, en π, actúan en forma muy diferente: en la homotecia esos semiespacios no son estables y en la simetría central en el plano sí lo son. Más aun, en esa homotecia sólo el centro es fijo mientras que en la simetría central en un plano tenemos toda una recta, perpendicular al plano, de puntos fijos.



Figuras homotéticas:
$A', \ldots, F'$
imágenes de $A, \ldots, F$ en
homotecia de centro O, y razón 2



Figuras homotéticas:
$A', \ldots, F'$
imágenes de $A, \ldots, F$ en
homotecia de centro O, y razón -2

Construcción de la imagen de una figura en una homotecia

Puede ser muy penoso construir las imágenes de cada uno de los puntos de una figura, aplicando en forma independiente para cada uno de ellos la definición de homotecia; y si la figura tiene infinitos puntos, esta tarea no terminaría nunca!. Naturalmente alcanzará con encontrar las imágenes de los puntos especiales. Suele ser suficiente aplicar la definición para determinar la imagen de uno de los puntos, y luego utilizar las propiedades de la homotecia, especialmente (c) y (d) para determinar las imágenes de los demás.

Por ejemplo, en cualquiera de las dos ilustraciones anteriores, luego de tener $A' = \eta(A)$, donde η es una homotecia de centro O, sin importar si la razón es positiva o negativa, se obtiene $B' = \eta(B)$ como punto intersección de

la recta $\overleftrightarrow{OB}$ y la recta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por B'.

De manera similar se obtienen $C' = \eta(C)$, $D' = \eta(D)$, etc.

5. Semejanza

Definiciones. Se llama **semejanza de razón** k, con k real no nulo, a cualquier transformación biyectiva que pueda expresarse como composición de una homotecia de razón k y una t.r., o de una t.r. y una homotecia de razón k. Si dos conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son correspondientes en una semejanza, se dicen **conjuntos semejantes**. Lo indicaremos como $\mathcal{A} \overset{\text{sem}}{\equiv} \mathcal{B}$.

En una semejanza de razón k, la imagen de un segmento de longitud m es un segmento de longitud $|k|m$; y la imagen de un ángulo es congruente con ese ángulo.

Como la identidad es una t.r. y también es una homotecia de razón 1, podemos decir que cualquier t.r. es también una semejanza de razón 1 y que cualquier homotecia de razón k es también una semejanza de razón k.

La expresión de una semejanza σ de razón k como composición de homotecia de razón k y t.r. no es única. De hecho se puede elegir arbitrariamente el centro de la homotecia η de razón k y entonces sí quedan determinadas las t.r. μ_1 y μ_2 tales que

$$\sigma = \mu_1 \circ \eta = \eta \circ \mu_2$$

Una homotecia y una t.r. sólo conmutan cuando el centro de la homotecia es un punto fijo de la t.r.

La inversa de una semejanza de razón k es una semejanza de razón $1/k$. Y la composición de semejanzas de razones k_1 y k_2 es una semejanza de razón k_1k_2.

Cuando un plano es estable en una semejanza, puede preservarse o no la orientación de ese plano, sin que importe para ello que k sea positivo o negativo. Hablaremos de **semejanza directa en ese plano** o **semejanza inversa en ese plano**.

Se puede justificar que en cualquier semejanza de razón distinta de 1, en la que algún plano sea estable, existirá, al menos, un punto de ese plano que es fijo en la semejanza. En esas condiciones la semejanza será una homotecia con ese centro o se podrá expresar como composición de una homotecia con ese centro y una t.r.; la t.r. será o bien una rotación con el mismo centro, o bien una simetría axial con eje que pasa por el centro.

Una semejanza queda determinada cuando se dan un par de puntos A, B y sus correspondientes A', B'; un semiplano α de borde $\overleftrightarrow{AB}$ y su correspondiente α' de borde $\overleftrightarrow{A'B'}$; y un semiespacio cuyo borde inluya a α y su correspondiente con borde que incluya a α'. ,

6. Triángulos semejantes

En esta sección nos referiremos a triángulos que llamaremos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, analizando la posibilidad de que exista una semejanza que transforme A en A', B en B' y C en C'. Cuando exista tal semejanza escribiremos $\overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{sem}}{\equiv} \overset{\triangle}{A'B'C'}$, lo que implicará que existe cierto número real positivo k tal que:

$$\begin{cases} \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = k, \\ \\ \widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{ABC}, \quad \widehat{B'C'A'} \equiv \widehat{BCA}, \quad \widehat{C'A'B'} \equiv \widehat{CAB} \end{cases}$$

Veremos que, en varios casos, es suficiente que se cumplan algunas de esas condiciones para que exista una semejanza que transforme el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ en el $\overset{\triangle}{A'B'C'}$.

Criterios de semejanza de triángulos

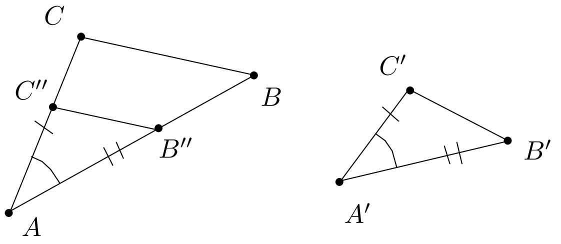
Estudiaremos cuatro criterios de semejanza de triángulos a los que hemos dado nombres que recuerdan el del criterio de congruencia de triángulos involucrado. Esquematizaremos las justificaciones mostrando cómo conseguir un triángulo auxiliar $\overset{\triangle}{A''B''C''}$, congruente con el $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, y tal que haya una homotecia que transforme $\overset{\triangle}{ABC}$ en $\overset{\triangle}{A''B''C''}$. Tendremos:

$$\overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{hom}}{\equiv} \overset{\triangle}{A''B''C''} \equiv \overset{\triangle}{A'B'C'}, \quad \text{por lo tanto,} \quad \overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{sem}}{\equiv} \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

Proposición. (Criterio L-A-L) *Si dos triángulos tienen dos pares de lados proporcionales, y los ángulos comprendidos congruentes, entonces los triángulos son semejantes.* En símbolos:

$$\textit{Si} \quad \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}, \quad \textit{y} \quad \widehat{C'A'B'} \equiv \widehat{CAB}, \quad \textit{entonces} \quad \overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{sem}}{\equiv} \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

Demostración.



η es la homotecia de centro A
y razón $k = \dfrac{|A'B'|}{|AB|}$
$A'' = \eta(A) = A\,,\ B'' = \eta(B)\,,$ y
$C'' = \eta(C)$

$$\overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{hom}}{\equiv} \overset{\triangle}{AB''C''},\ \text{con razón } k \tag{7}$$

De (7) y por hipótesis, $$\frac{|AB''|}{|AB|} = \frac{|AC''|}{|AC|} = \frac{|B''C''|}{|BC|} = k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} \tag{8}$$

De (7), $$\widehat{C''AB''} \equiv \widehat{CAB} \tag{9}$$

De (8) despejamos, $$|AB''| = |A'B'|, \quad \text{y} \quad |AC''| = |A'C'| \tag{10}$$

De (10), $$\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'}, \quad \text{y} \quad \overline{AC''} \equiv \overline{A'C'} \tag{11}$$

Por hipótesis, $$\widehat{C'A'B'} \equiv \widehat{CAB} \tag{12}$$

De (9) y (12), $$\widehat{C''AB''} \equiv \widehat{C'A'B'} \tag{13}$$

L-A-L de cong., con (11) y (13), $$\overset{\triangle}{AB''C''} \equiv \overset{\triangle}{A'B'C'} \tag{14}$$

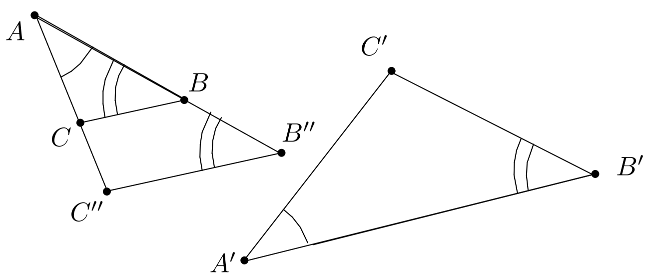
De (7) y (14), $$\overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{sem}}{\equiv} \overset{\triangle}{A'B'C'} \tag{15}$$

■

Proposición. (Criterio A-A) *Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente congruentes entonces los triángulos son semejantes.* En símbolos:

$$\textit{Si} \quad \widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'} \quad \textit{y} \quad \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}, \quad \textit{entonces} \quad \overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{sem}}{\equiv} \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

Demostración.



η es la homotecia de centro A
y razón $k = \dfrac{|A'B'|}{|AB|}$
$A'' = \eta(A) = A\,,\ B'' = \eta(B)$ y
$C'' = \eta(C)$

$$\overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{hom}}{\equiv} \overset{\triangle}{AB''C''},\ \text{con razón } k \tag{16}$$

De (16) y por hipótesis, $$\frac{|AB''|}{|AB|} = \frac{|AC''|}{|AC|} = \frac{|B''C''|}{|BC|} = k = \frac{|A'B'|}{|AB|} \tag{17}$$

De (16), $$\widehat{C''AB''} \equiv \widehat{CAB} \quad \text{y} \quad \widehat{AB''C''} \equiv \widehat{ABC} \tag{18}$$

De (17) despejamos, $$|AB''| = |A'B'| \tag{19}$$

De (19), $$\overline{AB''} \equiv \overline{A'B'} \tag{20}$$

Por hipótesis, $$\widehat{C'A'B'} \equiv \widehat{CAB} \quad \text{y} \quad \widehat{A'B'C'} \equiv \widehat{ABC} \tag{21}$$

De (18) y (21), $$\widehat{C''AB''} \equiv \widehat{C'A'B'} \quad \text{y} \quad \widehat{AB''C''} \equiv \widehat{A'B'C'} \tag{22}$$

A-L-A de cong., con (20) y (22), $$\overset{\triangle}{AB''C''} \equiv \overset{\triangle}{A'B'C'} \tag{23}$$

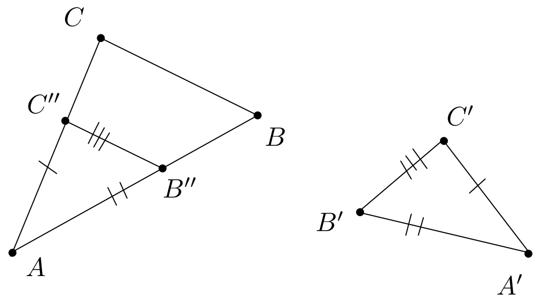
De (16) y (23), $$\overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{sem}}{\equiv} \overset{\triangle}{A'B'C'} \tag{24}$$

■

Proposición. (Criterio L-L-L) *Si dos triángulos tienen los tres lados respectivamente proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.* En símbolos:

$$\textit{Si}\quad \frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|A'C'|}{|AC|}=\frac{|B'C'|}{|BC|},\quad \textit{entonces}\quad A\overset{\triangle}{B}C \overset{\text{sem}}{\equiv} A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

Demostración.



η es la homotecia de centro A y razón $k=\dfrac{|A'B'|}{|AB|}$
$A''=\eta(A)=A\,,\ B''=\eta(B)\,,$ y $C''=\eta(C)$

$$A\overset{\triangle}{B}C \overset{\text{hom}}{\equiv} A\overset{\triangle}{B''}C'',\ \text{con razón } k \tag{25}$$

De (25) y por hipótesis,
$$\frac{|AB''|}{|AB|}=\frac{|AC''|}{|AC|}=\frac{|B''C''|}{|BC|}=k=\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|A'C'|}{|AC|}=\frac{|B'C'|}{|BC|} \tag{26}$$

De (26) despejamos,
$$|AB''|=|A'B'|,\quad |AC''|=|A'C'|\quad \text{y}\quad |B''C''|=|B'C'| \tag{27}$$

De (27),
$$\overline{AB''}\equiv\overline{A'B'},\quad \overline{AC''}\equiv\overline{A'C'}\quad \text{y}\quad \overline{B''C''}\equiv\overline{B'C'} \tag{28}$$

L-L-L de cong., con (28),
$$A\overset{\triangle}{B''}C''\equiv A'\overset{\triangle}{B'}C' \tag{29}$$

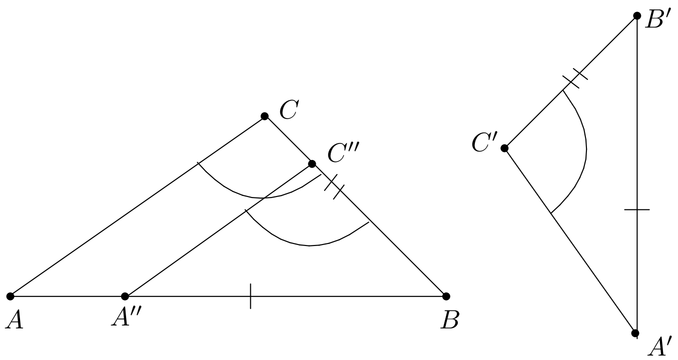
De (25) y (29),
$$A\overset{\triangle}{B}C \overset{\text{sem}}{\equiv} A'\overset{\triangle}{B'}C' \tag{30}$$

■

Proposición. (Criterio L-L-A) *Si dos triángulos tienen dos pares de lados respectivamente proporcionales y los ángulos que se oponen a los mayores de esos lados son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.* (Si justo los pares de lados que se comparan son congruentes entre sí, se puede elegir un ángulo cualquiera, en cada triángulo, de los que se oponen a los lados que se comparan). En símbolos:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|A'C'|}{|AC|},\quad \widehat{ACB}\equiv\widehat{A'C'B'},\quad \textit{y}\quad \overline{AB}\geq\overline{AC}\quad \textit{entonces}\quad A\overset{\triangle}{B}C \overset{\text{sem}}{\equiv} A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

Demostración.



η es la homotecia de centro B y razón $k=\dfrac{|A'B'|}{|AB|}$
$A''=\eta(A)\,,\ B''=\eta(B)=B\,,$ y $C''=\eta(C)$

$$A\overset{\triangle}{B}C \overset{\text{hom}}{\equiv} A''\overset{\triangle}{B}C'',\ \text{con razón } k \tag{31}$$

De (31) y por hipótesis,
$$\frac{|A''C''|}{|AC|}=\frac{|A''B|}{|AB|}=\frac{|BC''|}{|BC|}=k=\frac{|A'B'|}{|AB|}=\frac{|A'C'|}{|AC|} \tag{32}$$

De (32) despejamos,
$$|A''B|=k|AB|\quad \text{y}\quad |A''C''|=k|AC| \tag{33}$$

Por hipótesis,
$$\overline{AB}\geq\overline{AC},\quad \text{es decir}\quad |AB|\geq|AC| \tag{34}$$

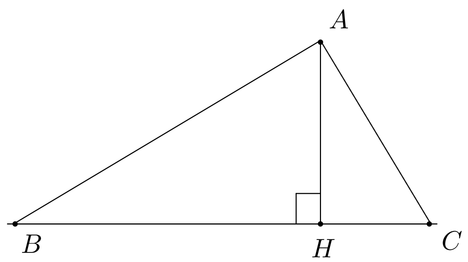
De (34), como $k>0$,
$$k|AB|\geq k|AC| \tag{35}$$

De(33) y (35),
$$\overline{A''B}\geq\overline{A''C''} \tag{36}$$

$$
\begin{array}{rlr}
\text{De (32) despejamos,} & |A''B| = |A'B'| \quad \text{y} \quad |A''C''| = |A'C'| & (37)\\
\text{De (37),} & \overline{A''B} \equiv \overline{A'B'} \quad \text{y} \quad \overline{A''C''} \equiv \overline{A'C'} & (38)\\
\text{De (31),} & \widehat{A''C''B} \equiv \widehat{ACB} & (39)\\
\text{Por hipótesis,} & \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'} & (40)\\
\text{De (39) y (40),} & \widehat{A''C''B} \equiv \widehat{A'C'B'} & (41)\\
\text{L-A-L de cong., con (38), (41) y (36),} & A\overset{\triangle}{B''}C'' \equiv A'\overset{\triangle}{B'}C' & (42)\\
\text{De (31), (42),} & A\overset{\triangle}{B}C \overset{\text{sem}}{\equiv} A'\overset{\triangle}{B'}C' & (43)
\end{array}
$$

■

Teorema. (Pitágoras) *El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*



Demostración. Sea H el pie de la perpendicular desde A hasta $\overline{BC}$. Quedan determinados dos triángulos, rectángulos en H, inversamente semejantes al triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$:

$$H\overset{\triangle}{A}C \overset{\text{sem}}{\equiv} A\overset{\triangle}{B}C \overset{\text{sem}}{\equiv} H\overset{\triangle}{B}A$$

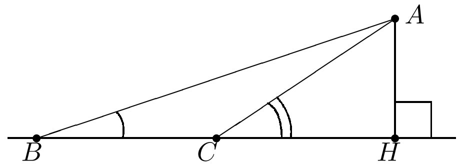
Notar que los vértices de cada triángulo se han puesto cuidando el orden: los correspondientes ángulos son congruentes ...
Por la primer semejanza: $\dfrac{|HA|}{|AB|} = \dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|HC|}{|AC|}$; del segundo y tercer miembro de la secuencia de igualdades:

$$|AC|^2 = |BC||HC| \tag{44}$$

Por la segunda semejanza: $\dfrac{|AB|}{|HB|} = \dfrac{|BC|}{|BA|} = \dfrac{|AC|}{|HA|}$; del primer y segundo miembro:

$$|AB|^2 = |BC||HB| \tag{45}$$

Sumando (44) y (45) obtenemos: $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC||HB| + |BC||HC| = |BC|\left(|HB| + |HC|\right) = |BC|^2$.
Observamos que hemos usado $|HB| + |HC| = |BC|$ porque realmente se cumple que H está entre B y C. Que eso sucede, se puede justificar por el absurdo: Si estuviera, por ejemplo C entre B y H, aplicando dos veces el primer teorema del ángulo exterior tendríamos

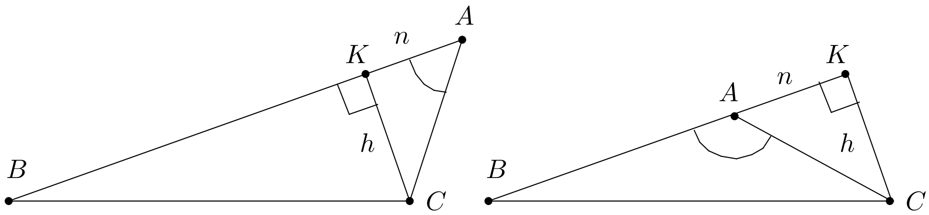


$$\widehat{AHC} > \widehat{ACH} > \widehat{CAB},$$

con lo que el ángulo $\widehat{CAB}$ sería agudo y no recto. ■

Teorema. *Dado un triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$, según que el cuadrado de la longitud del lado $\overline{BC}$ sea menor, igual o mayor que la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados se tendrá que el ángulo $\widehat{BAC}$ será, respectivamente, agudo, recto u obtuso.*

Demostración.



Independientemente de que el ángulo en A sea agudo, recto u obtuso, alguno de los otros dos ángulos será agudo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que es agudo el ángulo en B. Sea K el pie de la perpendicular desde C a $\overleftrightarrow{BA}$. El ángulo en A será agudo si K está entre B y A; recto si $K = A$ y obtuso si A está entre B y K.

El triángulo $\overset{\triangle}{KAC}$ es rectángulo en K por lo que

$$|AC|^2 = h^2 + n^2 \tag{46}$$

- $\widehat{BAC}$ **agudo:** • Llamemos $n = |KA| > 0$ y $h = |CK|$. Se cumple que $|AB| = |KB| + n$, es decir que $|KB| = |AB| - n$.

  El $\overset{\triangle}{KBC}$ es rectángulo en K, por lo que

  $$|BC|^2 = (|AB| - n)^2 + h^2 \tag{47}$$

  Despejando h^2 de (46) para sustituirlo en (47), y simplificando obtenemos:
  $|BC|^2 = |AB|^2 - 2|AB|\,n + n^2 + |AC|^2 - n^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB|\,n < |AB|^2 + |AC|^2$.
- $\widehat{BAC}$ **recto:** • Por el teorema de Pitágoras, $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$.
- $\widehat{BAC}$ **obtuso:** • Llamemos $n = |KA| > 0$ y $h = |CK|$. Se cumple que $|KB| = |AB| + n$.

  El $\overset{\triangle}{KBC}$ es rectángulo en K, por lo que

  $$|BC|^2 = (|AB| + n)^2 + h^2 \tag{48}$$

  Despejando h^2 de (46) para sustituirlo en (48), y simplificando obtenemos:
  $|BC|^2 = |AB|^2 + 2|AB|\,n + n^2 + |AC|^2 - n^2 = |AB|^2 + |AC|^2 + 2|AB|\,n > |AB|^2 + |AC|^2$.

  ■

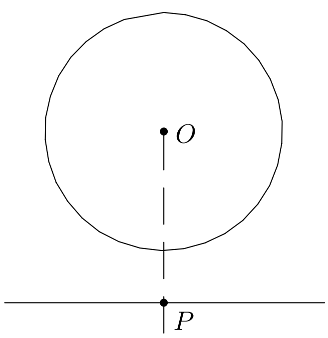
Una consecuencia inmediata:

Corolario. (Recíproco del teorema de Pitágoras) *Si en un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ se cumple $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$, entonces el triángulo es rectángulo en A.*

Demostración. De acuerdo al teorema anterior, sólo es posible, en las hipótesis del teorema, que el ángulo $\widehat{BAC}$ sea recto. ■

7. Algo pendiente sobre circunferencias

Ahora, gracias al axioma de continuidad y sus consecuencias podemos justificar que si una recta pasa por un punto interior de una circunferencia entonces recta y circunferencia tienen dos puntos en común.



Circunferencia de radio r
P pie de la perpendicular a la recta

condición	puntos en común con recta	nombre
$\lvert OP\rvert > r$	0 puntos	recta exterior
$\lvert OP\rvert = r$	1 punto	recta tangente
$\lvert OP\rvert < r$	0 puntos	recta secante

Además volvemos a obtener, en forma más simple, propiedades ya demostradas anteriormente.

Teorema. (Recta y circunferencia) *Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia del plano π de centro O y radio $r \in \mathbf{R}^+$ sea s un recta de π, y P el pie de la perpendicular a s por O. Entonces la cantidad de puntos de la intersección de la circunferencia con la recta es:*

(a). Un punto, si $|OP| = r$.

(b). Ningún punto, si $|OP| > r$.

(c). Dos puntos, si $0 < |OP| < r$.

Recíprocamente, si una circunferencia y una recta comparten exactamente 2, 1, o 0 puntos, entonces la distancia de O a la recta será respectivamente menor, igual o mayor que r.

Se sugiere hacer figuras ilustrativas para cada uno de los tres casos.

Demostración. Lo que caracteriza a los puntos de $\mathcal{C}$ es que su distancia a O es r.
Sea V un punto de la recta s tal que $\overline{PV}$ sea congruente con la unidad de medida. Consideremos el sistema de abscisas asociado a (P, V). Cada punto X de la recta s tendrá su abscisa que será un número real que denotaremos x; y por cada número real tendremos exactamente un punto de la recta s que lo tiene como abscisa. En particular sólo el punto P tiene abscisa 0.
Se cumple que $|PX| = |x|$, y por Pitágoras, tendremos:

$$|OX|^2 = |OP|^2 + |PX|^2 = |OP|^2 + |x|^2 = |OP|^2 + x^2$$

Es inmediato que $|OX|^2 \geq |OP|^2$ por lo que también es $|OX| \geq |OP|$.

- **Caso** $|OP| > r$ • También será $|OX| > r$ y todos los puntos de s serán exteriores.
- **Caso** $|OP| = r$ • Los puntos de s distintos de O tienen abscisa distinta de 0. Así que para cualquier $X \neq P$ de la recta s tendremos

  $$|OX|^2 = |OP|^2 + x^2 > |OP|^2, \quad \text{de donde,} \quad |OX| > |OP|.$$

  P será el único punto común a s y $\mathcal{C}$; los demás puntos de s serán exteriores a la circunferencia.
- **Caso** $|OP| < r$ • Si un punto X de la recta s, pertenece también a $\mathcal{C}$, su abscisa x deberá satisfacer:

  $$|OP|^2 + x^2 = r^2$$

  Como $|OP| \geq 0$ podremos asegurar que $r^2 > |OP|^2$, por lo que la ecuación tiene dos soluciones:

  $$x_1 = -a \quad \text{y} \quad x_2 = a, \quad \text{con} \quad a = \sqrt{r^2 - |OP|^2} > 0.$$

  es decir que existirán dos puntos de s en común con la circunferencia: A_1 de abscisa negativa $-a$ y A_2 de abscisa positiva a.

  Para cada punto X del segmento $\overset{\circ\!-\!\circ}{A_1A_2}$, con abscisa x se cumple:

$$\begin{aligned} -a < \quad x \quad &< a && (49)\\ |x| \quad &< \quad a && (50)\\ |x|^2 \quad &< \quad a^2 = r^2 - |OP|^2 && (51)\\ |OX|^2 \quad &= \quad |OP|^2 + |x|^2 < r^2 && (52)\\ |OX| \quad &< \quad r && (53)\\ & \quad X \text{ es un punto interior a la circunferencia} && (54)\end{aligned}$$

En forma similar se llega a que los puntos de $s - \overline{A_1A_2}$ son todos exteriores a la circunferencia. ∎

Capítulo XI

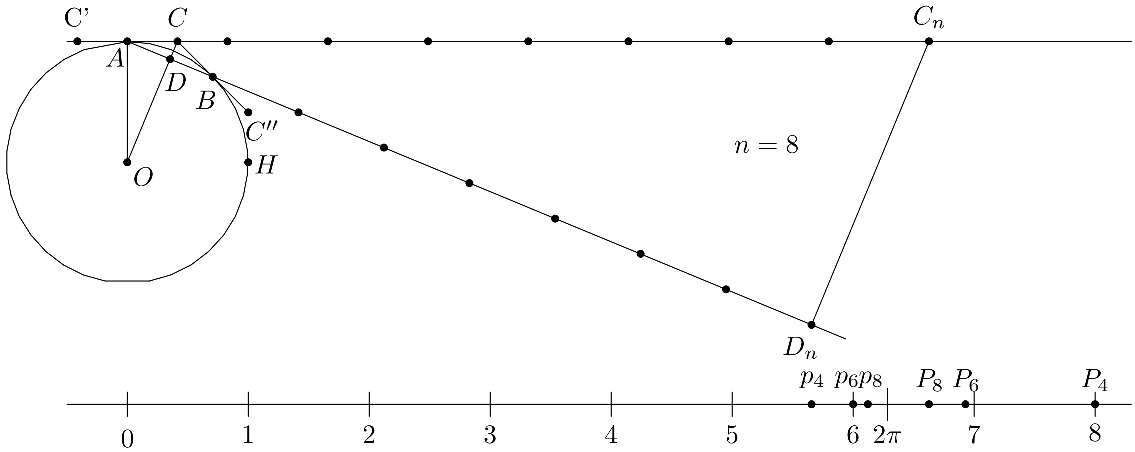
Longitud de la circunferencia

1. Llamado a la intuición

Los conocimientos geométricos que hemos repasado ya en este curso nos permiten calcular y/o construir los perímetros de algunos polígonos regulares inscriptos y circunscriptos a una circunferencia dada. Concretamente, no da mucho trabajo hacerlo para los de 3, 4, 6 y 8 lados.

En la figura siguiente, en la parte superior se indican pautas para ello, en especial para los polígonos regulares de 8 lados; y en la inferior se han representado varios perímetros suponiendo que el radio de la circunferencia sea 1.

Estamos denotando con p_n al perímetro del polígono regular inscripto de n lados; y con P_n al perímetro del polígono regular circunscripto de n lados.



- Para obtener el perímetro de los polígonos inscripto y circunscripto de 8 lados, partiendo de A y H sobre la circunferencia de centro O, y radio 1, con $\widehat{HOA}$ recto, B sobre la circunferencia y la bisectriz de $\widehat{HOA}$ y y C sobre la tangente en A y la bisectriz de $\widehat{BOA}$. El $\overline{AB}$ es el lado del inscripto de 8 lados y el $\overline{AC}$ es la mitad del lado del circunscripto. Transportando adecuadamente se obtienen los segmentos $\overline{AC_8}$ con longitud igual al perímetro del circunscripto y $\overline{AD_8}$ con longitud igual al inscripto.

- p_4, p_6 y p_8 corresponden a perímetros de polígonos regulares inscriptos de 4, 6 y 8 lados; P_4, P_6 y P_8 a los circunscriptos. Se dan los valores aproximados:

No. de lados	Inscripto	Circunscripto
n	p_n	P_n
4	5.657	8
6	6	6.928
8	6.123	6.627

Es fácil creer que al aumentar n se van a ir acercando p_n y P_n, siempre con $p_n < P_n$, y que hay exactamente un número real que separa a los perímetros de los inscriptos de los perímetros de los circunscriptos. Ese número es el que, por definición será la longitud de la circunferencia de radio 1 y el doble del número llamado π.

En lo que sigue, formalizaremos un poco estas ideas, y para ello necesitaremos justificar algunas propiedades relativas a polígonos (convexos) inscriptos o circunscriptos en circunferencias.

Todos los polígonos de los que hablaremos en este tema serán los que hemos llamado en este curso polígonos (convexos), es decir, la recta determinada por dos vértices consecutivos del polígono dejará del mismo lado a los demás vértices del polígono.

Dada una circunferencia $\mathcal{C}$,

- existen polígonos inscriptos y circunscriptos a $\mathcal{C}$, y podemos referirnos a sus perímetros.
- dado un polígono inscripto en $\mathcal{C}$, siempre hay otros, también inscritos en $\mathcal{C}$, de perímetro mayor que el dado; y dado un polígono circunscripto a $\mathcal{C}$ siempre hay otros, también circunscriptos a $\mathcal{C}$, de perímetro menor que el dado.
- el perímetro de cualquier polígono (convexo) inscripto en $\mathcal{C}$, es menor que el perímetro de cualquier polígono circunscripto a la misma $\mathcal{C}$.
- dado un real positivo cualquiera, sin importar cuan pequeño sea, siempre se puede encontrar un polígono circunscrito a $\mathcal{C}$ y otro polígono inscripto en $\mathcal{C}$, tales que la diferencia de perímetros sea menor que ese real.

Esos son los hechos que permiten justificar que existe un único número real que es mayor que el perímetro de cualquier polígono (convexo) inscripto en $\mathcal{C}$ y que es menor que el perímetro de cualquier polígono circunscripto (convexo) a $\mathcal{C}$. Ese único número real, que separa los perímetros de los inscriptos de los perímetros de los circunscriptos es el que llamamos **longitud de** $\mathcal{C}$.

La mitad de la longitud de una circunferencia de radio 1 es el número real que llamamos π.

El número π ha despertado el interés de muchos matemáticos. Daremos aquí algunos datos.

Arquímedes hizo cálculos con polígonos de 6, 12, 24, 48 y 96 entre 300 y 200 años antes de Jesucristo y encontró que π es mayor que $223/71$ y menor que $22/7$.

En esa época sólo se manejaban con soltura los números racionales, aunque sí se sabía que existen pares de segmentos “inconmensurables”: si se toma a uno de los segmentos como unidad de medida, no hay nigún racional que sea la medida del otro respecto de esa unidad.

Se conocía que la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables. Hoy en día, como trabajamos con números reales, usamos con toda confianza la fórmula del teorema de Pitágoras. Tomando el lado del cuadrado como unidad, la diagonal de ese cuadrado mide $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Y sabemos que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

También Descartes, en el siglo XVII, hizo cálculos relativos a π utilizando polígonos de 8, 16, 32, 64 y 128 lados.

Uno de los problemas que los griegos dejaron para la posteridad fue el de la “cuadratura del círculo” que consiste en: dado un círculo, construir, con regla y compás, un cuadrado de igual superficie que el círculo. Si π fuera un número racional, ese problema sería fácilmente resoluble. Y también si el número π pudiera ser expresado a partir de números racionales mediante una o varias raíces cuadradas.

En 1770, Lambert demostró que π es irracional. Y ya en 1882, Lindeman consiguió demostrar que π es “transcendente”, es decir π no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. En consecuencia, el problema de la cuadratura del círculo no tiene solución.

En este curso obtendremos fórmulas para perímetros de algunos polígonos regulares inscriptos o circunscriptos, que podrían utilizarse para programar una computadora y obtener números que se aproximan más y más a π. Pero hay otras fórmulas, no basadas en los polígonos, que proveen algoritmos más eficientes. Hay programas de computadora con los que se han calculado miles de cifras de π.

La construcción de polígonos regulares, con sólo regla y compás, también ha sido estudiada con interés. Actualmente se conoce con toda precisión, gracias a estudios algebraicos, cuáles polígonos regulares pueden construirse con regla y compás y cuáles no; por ejemplo los de 3, 4, 5, 6, 8 lados son construibles con regla y compás, pero el de 7 lados no lo es. Gauss se sintió muy orgulloso por haber podido probar que el de 17 lados sí es construible con regla y compás.

2. Acotaciones relativas a perímetros de polígonos inscriptos y circunscriptos

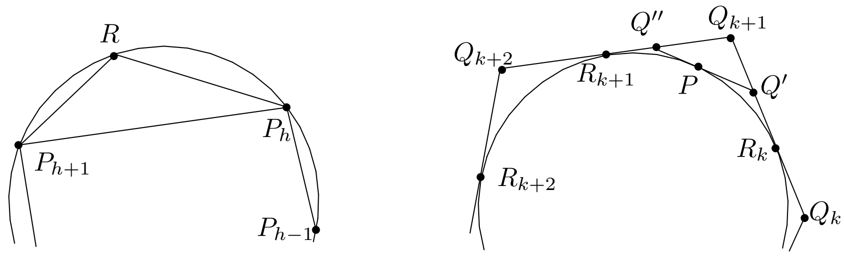
Lema. *Si a un polígono (convexo) inscripto se le agrega un vértice más, su perímetro aumenta. Y si a un polígono (convexo) circunscripto se le agrega un punto de contacto más, su perímetro disminuye.*

Demostración. Aquí se utiliza la desigualdad triangular (Ver pág. 56).

- Sean $P_1,\dots,P_h,P_{h+1},\dots,P_n$ los vértices de un inscripto. Supongamos que agregamos un vértice más, R, ubicándolo entre P_h y P_{h+1}. Al perímetro del polígono se le resta $|P_hP_{h+1}|$ y se le suma $|P_hR|+|RP_{h+1}|$. En el triángulo $P_h\overset{\triangle}{R}P_{h+1}$,

$$|P_hP_{h+1}|<|P_hR|+|RP_{h+1}|,$$

por lo que el perímetro del nuevo polígono es mayor.



- Si bien el polígono circunscripto tiene vértices $Q_1, \ldots, Q_k, Q_{k+1}, Q_{k+2}, \ldots, Q_n$, es útil tener en cuenta los puntos de contacto con la circunferencia que hemos llamado $R_1, \ldots, R_k, R_{k+1}, \ldots, R_n$, con R_k perteneciente al lado $\overline{Q_k Q_{k+1}}$. Cada punto de contacto divide al lado correspondiente en dos segmentos, y se cumple que $\overline{Q_{k+1} R_{k+1}} \equiv \overline{Q_{k+1} R_k}$.

  Supongamos que agregamos un punto de contacto más, P, entre R_k y R_{k+1}. Esto significa que dos lados del polígono circunscripto serán sustituidos por tres lados: El vértice Q_{k+1} desaparece y aparecen dos vértices nuevos Q' y Q''. Al perímetro se le resta $|Q'Q_{k+1}| + |Q_{k+1}Q''|$ y se le suma $|Q'Q''|$. En el triángulo $\overset{\triangle}{Q'Q''Q_{k+1}}$,

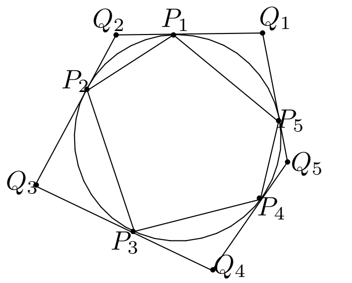
  $$|Q'Q''| \; < \; |Q'Q_{k+1}| \; + \; |Q_{k+1}Q''|,$$

  por lo que el perímetro del nuevo polígono es menor. ∎

Como consecuencia, tenemos:

Teorema. *Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son polígonos respectivamente inscriptos y circunscriptos a una misma circunferencia, entonces el perímetro de $\mathcal{P}$ es estrictamente menor que el perímetro de $\mathcal{Q}$.*

Demostración.



- Un caso fácil de considerar es el ilustrado; en él, ambos polígonos, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, tienen exactamente el mismo número de lados y además los vértices del inscripto coinciden con los puntos de tangencia del circunscripto. La contribución al perímetro de cada lado del polígono inscripto se compara con la contribución de la suma de partes de dos lados del circunscripto. Por ejemplo en la ilustración la contribución al polígono inscripto de $|P_2P_3|$ la comparamos con la suma de $|P_2Q_3|$ (proveniente del lado $\overline{Q_2Q_3}$) y de $|Q_3P_3|$ (proveniente del lado $\overline{Q_3Q_4}$). Por la propiedad triangular

  $$|P_2P_3| < |P_2Q_3| + |Q_3P_3|$$

  y por lo tanto el perímetro de $\mathcal{P}$ es menor que el perímetro de $\mathcal{Q}$.

- Para el otro caso, se pueden considerar dos polígonos auxiliares, relacionados con los dados, en las condiciones del primer caso. Concretamente al polígono inscripto $\mathcal{P}$ le agregamos los vértices necesarios para cubrir todos los puntos de contacto del circunscripto y así obtenemos un polígono $\mathcal{P}'$. Y al polígono circunscripto $\mathcal{Q}$ le agregamos los lados que haga falta, con puntos de contacto en los vértices del inscripto, de modo de cubrirlos a todos y así obtenemos $\mathcal{Q}'$. Se cumplirá que:

  $$\underline{\text{perím. de } \mathcal{P}} < \underline{\text{perím. de } \mathcal{P}'} < \underline{\text{perím. de } \mathcal{Q}'} < \underline{\text{perím. de } \mathcal{Q}}$$

  y por lo tanto

  $$\underline{\text{perímetro de } \mathcal{P}} < \underline{\text{perímetro de } \mathcal{Q}}.$$

∎

3. Polígonos regulares

Llamamos **polígono regular** a cualquier polígono (convexo) que tenga todos sus lados congruentes y todos sus ángulos congruentes.

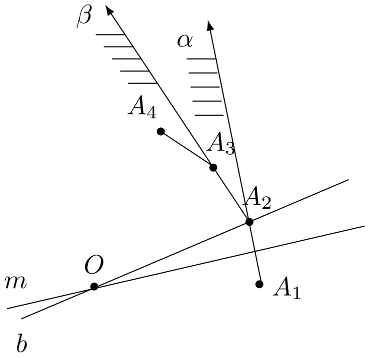
Proposición. *Todos los polígonos regulares son inscribibles y también son circunscribibles*

Los triángulos, aunque no sean regulares, seguro que tienen las dos propiedades.

Para justificar que también los polígonos regulares de más de tres vértices —más de tres lados— son inscribibles y circunscribibles, alcanzará con mostrar que la circunferencia que pasa por tres vértices sucesivos del polígono, pasa también por un cuarto vértice, por lo que, reiterando la justificación, pasará por todos. Y que una circunferencia que sea tangente a tres de los lados, será tangente a un cuarto lado y en definitiva a todos los lados. Veamos la primera parte:

Demostración. Sean A_1, A_2, A_3, A_4 cuatro vértices sucesivos de un polígono (convexo) regular, con $A_4 \neq A_1$. Por ser regular el polígono tendremos:

$$\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3} \equiv \overline{A_3A_4} \quad \text{y} \quad \widehat{A_1A_2A_3} \equiv \widehat{A_2A_3A_4}$$



Sean α y β los semiplanos de bordes las rectas $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ y $\overleftrightarrow{A_2A_3}$, respectivamente, y que contienen a todos los vértices. (Recordemos que eso es posible porque el polígono es convexo). Pensemos en la t.r. ρ en la que

$$\begin{cases} \rho(\overrightarrow{A_1A_2}) = \overrightarrow{A_2A_3} \\ \rho(\alpha) = \beta \end{cases}$$

Es fácil convencerse de que ρ es una rotación y su centro, llamémosle O, está en la intersección de la mediatriz de $\overline{A_1A_2}$ y la bisectriz de$\widehat{A_1A_2A_3}$

Se verifica:

$\rho(A_1) = A_2$ por ser orígenes de las semirrectas, por lo que $\overline{OA_1} \equiv \overline{OA_2}$; $\rho(A_2) = A_3$ por transporte de segmento $\overline{A_1A_2}$ sobre la semirrecta $\overrightarrow{A_2A_3}$, por lo que $\overline{OA_2} \equiv \overline{OA_3}$; $\rho(\overrightarrow{A_2A_3}) = \overrightarrow{A_3A_4}$ por transporte del ángulo$\widehat{A_1A_2A_3}4$ a parir de la semirrecta $\overrightarrow{A_3A_4}$ sobre el semiplano β; y $\rho(A_3) = A_4$, por transporte de $\overline{A_2A_3}$ sobre la semirrecta $\overrightarrow{A_3A_4}$, por lo que $\overline{OA_3} \equiv \overline{OA_4}$. Es decir que la circunferencia de centro que pasa por A_1 pasa también por A_2, A_3, y A_4.

■

Se entiende que el resultado anterior puede generalizarse (con una demostración por inducción) a que *Para cada polígono (convexo) regular (convexo) existe un punto que equidista de todos los vértices del polígono.* O en otras palabras, *Todos los polígonos (convexos) regulares son inscribibles*

Por otro lado, dado un segmento de medida menor que el diámetro de una circunferencia, es posible decidir si existe un polígono regular inscripto en esa circunferencia con lado congruente al segmento dado, "transportando cuerdas sucesivas" congruentes al segmento . . .

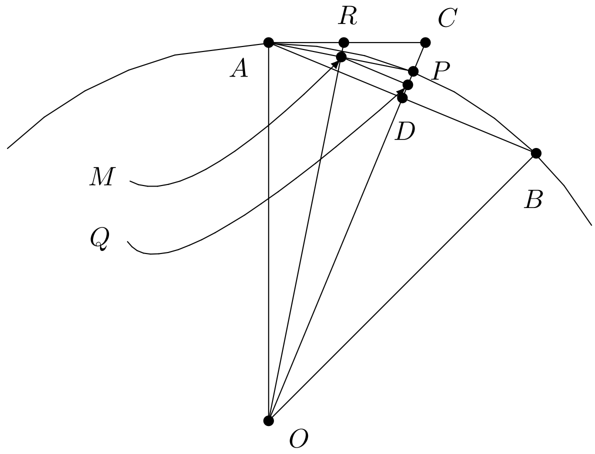
Se puede justificar, no lo haremos aquí, que existen polígonos regulares –es decir polígonos (convexos) con todos sus lados congruentes y todos sus ángulos congruentes– de cualquier número de lados. Sabemos, por ejemplo, cómo construir, con regla y compás, polígonos regulares de 3, 4 o 6 lados, y también sabemos calcular los perímetros de esos polígonos. Además dado un polígono regular de n lados podemos, utilizando bisectrices de los ángulos centrales, construir un polígono regular de $2n$ lados.

4. Polígonos regulares de n y de $2n$ lados

Definiciones. Dado un polígono regular se llama **centro** del mismo al centro de la circunferencia que pasa por todos sus vértices, y que también es centro de la circunferencia tangente a todos sus lados. Se llama **apotema** del mismo a la altura de los triángulo isósceles formados por su centro y dos vértices consecutivos. Y se llama **perímetro** a la suma de las longitudes de todos sus lados.

Llamaremos $\mathcal{C}$ a una circunferencia de radio r, y centro O y p_n y P_n a los perímetros de los polígonos regulares de n lados inscriptos y circunscriptos respectivamente en $\mathcal{C}$. Supondremos que los vértices del polígono inscripto sean los puntos de contacto de los lados del polígono circunscripto.

La ilustración muestra la relación entre los lados de polígonos inscriptos y circunscriptos a una misma circunferencia de cierto número de lados y del doble de ese número de lados.



Polígonos regulares

- de n lados:
  lado del inscripto: $|AB| = 2|AD|$
  lado del circunscripto: $2|AC|$
- de $2n$ lados:
  lado del inscripto: $|AP| = 2|AM|$
  lado del circunscripto: $2|AR|$

Los triángulos $\overset{\triangle}{ADC}$ y $\overset{\triangle}{ODA}$ son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares (por lo que tienen los ángulos correspondientes congruentes). En consecuencia

$$\frac{|AC|}{|OA|} = \frac{|AD|}{|OD|} = \cdots$$

De ahí,

$$|OD| = \frac{|AD| \cdot |OA|}{|AC|}. \tag{1}$$

Sea P común a la circunferencia y a $\overrightarrow{OC}$. Es claro que la simetría axial de eje $\overleftrightarrow{OD}$ transforma a la circunferencia en ella misma y a los puntos O, A, B, C y P respectivamente en O, B, A, C y P. Como $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz de $\widehat{AOB}$, si $\overline{AB}$ es lado de un polígono regular de n lados, $\overline{AP}$ será lado de un polígono regular de $2n$ lados inscripto en la misma circunferencia. Y $\overline{AR}$ la mitad del lado del polígono circunscripto.

Sean M y Q los puntos medios de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PD}$.

Por ser M punto medio del lado $\overline{AP}$ del triángulo isósceles $\overset{\triangle}{AOP}$, se cumple:

$$\widehat{AOM} \equiv \widehat{MOP}.$$

Además,

$$\widehat{MOP} = \widehat{MOQ} = \widehat{QOM} \text{ y } \widehat{AOM} = \widehat{AOR}.$$

Por lo tanto

$$\overset{\triangle}{AOR} \overset{\text{sem}}{\equiv} \overset{\triangle}{QOM} \quad \text{y} \quad \frac{|AR|}{|QM|} = \frac{|OA|}{|OQ|} = \cdots$$

Además, Q es punto medio de $\overline{DP}$, por lo que $|OQ| = 1/2(|OD| + |OP|)$; $\overline{QM}$ es base media de $\overset{\triangle}{ADP}$, por lo que $|QM| = 1/2|AD|$; y $|OP| = |OA|$. Así que sustituyendo en lo anterior, y simplificando un factor $1/2$ obtenemos:

$$\frac{|AR|}{|AD|} = \frac{|OA|}{|OD| + |OA|}$$

Sustituyendo $|OD|$ de (1), en la expresión anterior se obtiene,

$$\frac{|AR|}{|AD|} = \frac{|OA|}{\dfrac{|AD| \cdot |OA|}{|AC|} + |OA|} = \frac{|OA| \cdot |AC|}{|AD| \cdot |OA| + |OA| \cdot |AC|} = \frac{|AC|}{|AD| + |AC|},$$

es decir

$$|AR| = \frac{|AD| \cdot |AC|}{|AD| + |AC|} \tag{2}$$

Los ángulos $\widehat{RAP}$ y $\widehat{PAB}$ son congruentes por ser uno semiinscripto y otro inscripto en arcos congruentes. Por tanto los triángulos rectángulos tienen dos ángulos respectivamente congruentes y

$$\overset{\triangle}{RAM} \overset{\text{sem}}{\equiv} \overset{\triangle}{PAD}, \qquad \frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|AR|}{|AP|} = \cdots$$

Como $|AP| = 2|AM|$, tendremos $\dfrac{|AM|}{|AD|} = \dfrac{|AR|}{2|AM|}$

Por lo tanto,

$$|AM| = \sqrt{\frac{|AD| \cdot |AR|}{2}} \tag{3}$$

Las relaciones (1) y (3) nos dan fórmulas para calcular los semilados $|AR|$ y $|AM|$, que contribuyen a los perímetros P_{2n} y p_{2n} respectivamente a partir de los semilados $|AC|$ y $|AD|$ que contribuyen a los perímetros P_n y p_n respectivamente.

Como los perímetros cumplen

$$\begin{aligned} P_n &= 2\,n\,|AC| \\ p_n &= 2\,n\,|AD| \\ P_{2n} &= 2\,(2\,n)\,|AR| \\ p_{2n} &= 2(2n)\,|AM| \end{aligned}$$

utilizando (1) y (3) se llega a

$$\begin{aligned} P_{2n} &= 2\,(2\,n)\,|AR| = 2\,(2\,n)\,\frac{|AD| \cdot |AC|}{|AD| + |AC|} \\ p_{2n} &= 2\,(2n)\sqrt{\frac{|AD| \cdot |AR|}{2}} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{cases} P_{2n} = \dfrac{2p_nP_n}{p_n + P_n} \\ \\ p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}} \end{cases} \tag{4}$$

Las fórmulas nos permiten calcular los perímetros de los polígonos regulares de $2n$ lados, inscritos o circunscriptos a cierta circunferencia, a partir de los de n lados. Reiterando la aplicación de estas fórmulas a partir de los perímetros correspondientes, por ejemplo, a los polígonos de tres lados (triángulos equiláteros), se obtienen dos "sucesiones de números reales"

En la tabla siguiente se muestran los primeros cálculos, con resultados redondeados a 6 cifras decimales significativas, relacionados con una circunferencia de radio 1.

n	p_n	P_n	$P_n - p_n$
3	5,19615	10,3923	5,19615
6	6.	6,92820	0,928203
12	6,21166	6,43078	0,219124
24	6,26526	6,31932	0,0540627
48	6,27870	6,29217	0,0134720
96	6,28206	6,28543	0,00336530
192	6,28290	6,28375	0,000841155

Diferencia entre perímetro del circunscripto y del inscripto

Se aprecia, en los primeros elementos de esas sucesiones, que la diferencia entre el perímetro del circunscripto y el del inscripto va disminuyendo, y cada diferencia, para el doble de n, es bastante menor que la mitad de la diferencia anterior, para n; veamos cómo justificar que esto ocurre para todos los valores de n.

Aplicando (4) y operando algebraicamente, conseguimos expresar a $P_{2n} - p_{2n}$ como un producto $k_n(P_n - p_n)$.

$$\begin{aligned}
P_{2n} - p_{2n} &= \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} - \sqrt{p_nP_{2n}} \\
&= \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} - \sqrt{p_n\frac{2p_nP_n}{p_n + P_n}} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} - \frac{\sqrt{2p_n^2P_n}\sqrt{p_n + P_n}}{\sqrt{p_n + P_n}\sqrt{p_n + P_n}} \\
&= \frac{p_n\left(2P_n - \sqrt{2P_np_n + 2P_n^2}\right)}{p_n + P_n} \\
&= \frac{p_n\left(2P_n - \sqrt{2P_np_n + 2P_n^2}\right)\left(2P_n + \sqrt{2P_np_n + 2P_n^2}\right)}{(p_n + P_n)\left(2P_n + \sqrt{2P_np_n + 2P_n^2}\right)} \\
&= \frac{p_n\left(4P_n^2 - (2P_np_n + 2P_n^2)\right)}{(p_n + P_n)\left(2P_n + \sqrt{2P_np_n + 2P_n^2}\right)} \\
&= \frac{p_n(2P_n)(P_n - p_n)}{(p_n + P_n)\left(2P_n + \sqrt{2P_np_n + 2P_n^2}\right)} \\
&= k_n(P_n - p_n)
\end{aligned}$$

El factor k_n se puede acotar sustituyendo los P_n del denominador por p_n. Como $P_n > p_n$ se cumplirá:

$$\begin{aligned}
k_n = \frac{2p_nP_n}{(p_n + P_n)\left(2P_n + \sqrt{2P_np_n + 2P_n^2}\right)} &< \frac{2p_nP_n}{(p_n + p_n)\left(2p_n + \sqrt{2p_np_n + 2p_n^2}\right)} \\
&= \frac{2p_nP_n}{(2p_n)(2p_n)} \\
&= \frac{P_n}{4p_n}
\end{aligned}$$

Además, todos los P_n son menores que el primero que tomamos, en este caso P_3, y todos los p_n son mayores que el primero que tomamos p_3. Por lo que:

$$k_n < \frac{P_n}{4p_n} < \frac{P_3}{4p_3} = \frac{6\sqrt{3}}{4 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

Así que, cualquiera sea n se cumple

$$P_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{2}(P_n - p_n)$$

Entonces dado un real ϵ positivo cualquiera, y un par de polígonos regulares circunscripto e inscripto a una circunferencia de n lados, que cumplan $P_n - p_n = D$, duplicando cierto número de veces podremos conseguir un par de circunscripto e inscripto que difieran en menos de ϵ.

Basta proponerse encontrar un número natural mayor que el x tal que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x D = \epsilon \quad \text{o} \quad 2^x = \frac{D}{\epsilon}$$

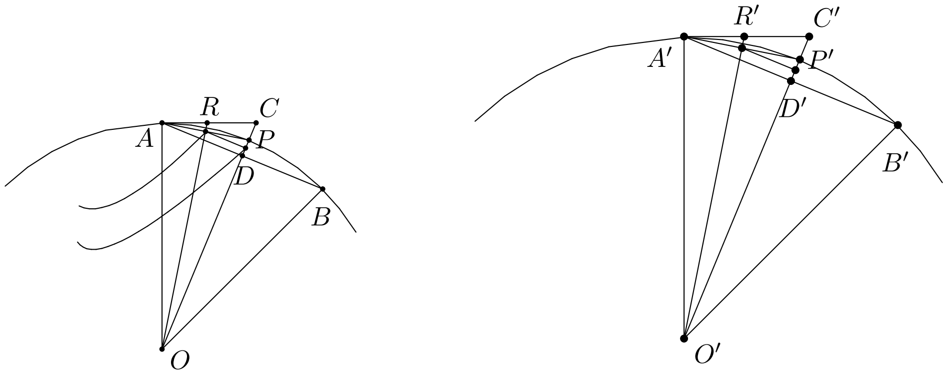
lo que se resuelve con

$$x = \log_2 \frac{D}{\epsilon}$$

y luego duplicar un número de veces mayor que el x encontrado.

El número π

El método anterior, para calcular la longitud de una circunferencia cualquiera, tan aproximadamente como uno lo desee, exige el cálculo de muchos perímetros de polígonos. Sin embargo, el trabajo efectuado para una circunferencia puede aprovecharse para todas las demás circunferencias. Esto se debe a que dadas dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ de radios r y r' respectivamente, cada una junto con un polígono regular inscripto y otro circunscripto de igual número de lados, resultan figuras semejantes y la razón de la semejanza es precisamente el cociente de los radios:



Se cumple que el cociente de dos segmentos cualesquiera correspondientes en la semejanza es el mismo, por lo que el cociente de perímetros correspondientes también será el mismo:

$$\frac{r'}{r} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{A'R'}{AR} = \cdots = \frac{P'_n}{P_n} = \frac{p'_n}{p_n} \tag{5}$$

Si llamamos L y L' a los únicos reales que son longitudes de las circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, se cumplirá:

$$p_n < \quad L \quad < P_n \tag{6}$$

$$p'_n < \quad L' \quad < P'_n \tag{7}$$

multiplicando la primera por r'/r, y simplificando teniendo en cuenta (5),

$$\begin{aligned} \frac{r'}{r}p_n < &\quad \frac{r'}{r}L \quad < \frac{r'}{r}P_n \\ p'_n < &\quad \frac{r'}{r}L \quad < P'_n \end{aligned} \tag{8}$$

(7) y (8) valen para todo n; y sabemos que no puede haber dos reales distintos que separen a los perímetros de los inscriptos de los de los circunscriptos; concluimos que $L' = r'/r\, L$, es decir $L'/r' = L/r$.

Lo anterior vale para cualquier par de circunferencias, por lo que existe una constante real que es el cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y el radio de la misma. A la mitad de esa constante se le llama π.

De acuerdo a los cálculos de la tabla de pág. 140, la longitud de una circunferencia de radio 1 es algo más de 6.28, por lo que π será algo más de 3.14. Cálculos más laboriosos producen la aproximación:

$$\pi \cong 3{,}14159265358979323 84$$

En conclusión, para calcular la longitud de cualquier circunferencia se puede aplicar la fórmula

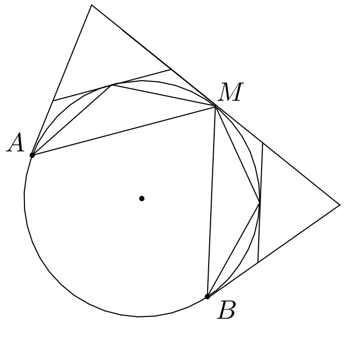
$$L = 2\,\pi\, r$$

donde r es su radio y L su longitud.

5. Longitud de un arco de circunferencia

El método de duplicación anterior se adapta sin dificultad al cálculo de longitudes de arcos de circunferencia, utilizando poligonales (convexas) de modo que los puntos de contacto de las poligonales circunscritas coincidan con los vértices de las inscriptas.

La figura muestra las dos primeras parejas de poligonales para el arco de extremos A y B que contiene a M donde M pertenece a la mediatriz de la cuerda $\overline{AB}$.



6. Medida de ángulos no orientados

Ya hemos visto que, gracias al axioma de continuidad, luego de elegir un segmento como unidad, hemos podido asignar un número real no negativo a cada segmento y lo hemos llamado longitud o medida del mismo. Y esa asignación cumple con determinadas propiedades.

Algo similar se puede conseguir para los ángulos no orientados. Luego de elegida una unidad, se le asigna a cada ángulo no orientado un real no negativo al que llamaremos **medida del ángulo** respecto de esa unidad; y esa asignación cumplirá que:

- ángulos congruentes tienen igual medida.
- un ángulo menor (pág.52) que otro tiene medida menor que la medida del otro.
- si un ángulo es suma (pág. 55) de otros dos, su medida es la suma de las medidas de los otros dos.

Pero hay una diferencia importante: entre los segmentos no nulos posibles no hay ninguno que se destaque de los demás; en cambio entre los ángulos no nulos sí los hay que se destacan de los demás: por ejemplo los ángulos rectos, o los ángulos llanos.

Grados sexagesimales

Es frecuente que la pregunta "¿Qué es un ángulo recto?" reciba la respuesta "es el que mide 90^o". Recordamos que un ángulo es recto si es congruente con alguno de sus adyacentes. No necesitamos saber nada acerca de grados para saber acerca de ángulos rectos. En realidad es el grado el que puede definirse en términos del ángulo recto;

La medida de los ángulos, en **grados sexagesimales**, corresponde a tomar como unidad de medida, un ángulo tal que un recto sea suma de 90 veces ese ángulo unidad. Es decir que *un ángulo de 1^o es tal que el ángulo recto es suma de 90 veces ese ángulo.* (La división de cada grado en sesenta **minutos** y de cada minuto en 60 **segundos** es lo que motiva el nombre de grado sexagesimal. Esta división era muy convenientemente, antes de que se hicieran de uso corriente los decimales, porque permitía expresar la medida de muchos ángulos con números enteros, no negativos, de grados, minutos y segundos).

En esas condiciones, la medida del ángulo llano será de 180^o ya que un llano es la suma de dos rectos; y la del ángulo nulo de 0^o; la del ángulo de los triángulos equiláteros es 60^o ya que un llano es suma de los tres ángulos de cualquier triángulo, etc.

Radianes

Otro modo interesante de elegir un ángulo como unidad de medida consiste en elegirlo de modo que la longitud de cierto arco asociado a ese ángulo tenga longitud 1.

La utilidad proviene de la siguiente correspondencia biyectiva:

Dada una circunferencia fija $\mathcal{C}$, de radio 1, sabemos que cada ángulo central de esa circunferencia está asociado biyectivamente con su arco correspondiente; recordamos que un ángulo central de $\mathcal{C}$ es un ángulo, coplanar con $\mathcal{C}$, con su vértice en el centro de $\mathcal{C}$; y tal que su arco correspondiente es la intersección de $\mathcal{C}$ con el interior del ángulo.

Esta correspondencia ángulo $\longleftrightarrow$ arco es tal que a mayor ángulo le corresponde arco de mayor longitud; y que a cualquier ángulo que sea suma de otros dos le corresponde un arco cuya longitud es suma de las longitudes de los arcos correspondientes a los otros dos ángulos.

Si analizamos la correspondencia en relación a dos circunferencias, $\mathcal{C}$, y $\mathcal{C}'$, ambas de radio 1, gracias a las transformaciones rígidas en la que a $\mathcal{C}$ le corresponde $\mathcal{C}'$, a ángulos centrales de una y otra que sean congruentes les corresponderá arcos con longitudes iguales.

Elegiremos, como ángulo unidad, a un ángulo que tenga como arco correspondiente, en una circunferencia de radio 1, un arco de longitud 1. Diremos que ese ángulo es de 1 **radián**.

Con esa elección de unidad, la medida de cualquier otro ángulo respecto de esa unidad coincidirá con la longitud del arco correspondiente de una circunferencia de radio 1: conceptualmente nos ahorramos la comparación del ángulo dado con ángulos que se expresen como fracciones del ángulo de 1 radián, sustituyéndola por la medida de la longitud de cierto arco.

En consecuencia, la medida, en radianes de un ángulo, es la longitud del arco, correspondiente a ese ángulo, en una circunferencia de radio 1. El símbolo usado para indicar radianes es rad.

Los ángulos rectos se asocian con arcos de longitud la cuarte parte de la de la circunferencia, es decir que su medida en radianes será:

$$\frac{1}{4} 2\,\pi\,1 = \frac{\pi}{2}$$

Así que el ángulo recto mide $\pi/2 \ \mathrm{rad}$ y en consecuencia el ángulo llano, $\pi \ \mathrm{rad}$.

Para pasar de la medida de un ángulo en radianes a la medida en grados o al revés, aparece un factor de conversión. Como $\pi \ \mathrm{rad} = 180^o$, tendremos:

$$x \text{ rad } = \left(\frac{x \cdot 180}{\pi}\right)^{o} \qquad z^{o} = \frac{z \cdot \pi}{180} \text{ rad},$$

es decir,

$$1 \text{ rad } = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{o} \qquad 1^{o} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

Nota. Para hablar de longitudes necesitamos haber elegido una unidad de longitud, y para hablar de radianes nos apoyamos en longitudes. Sin embargo, no importa cuál sea la unidad de longitudes elegida, todos los posibles ángulos de 1 rad, correspondientes a unidades de longitud distintas, resultan congruentes.

Para relacionar la medida de los ángulos con las longitudes de los arcos correspondientes para una circunferencia de radio cualquiera, si λ representa la longitud del arco y r la longitud del radio, ambas medidas respecto de una misma unidad y θ la medida del ángulo en radianes, suele usarse la fórmula

$$\lambda = \theta\, r,$$

y se insiste, naturalmente, en que θ debe expresarse en radianes. En esas condiciones, esa fórmula no disfruta de las características de otras fórmulas físicas en las que los símbolos de la fórmula se usan para representar no sólo al número que expresa la medida sino al número junto con un simbolito que identifica a la unidad; y se pueden usar con unidades cualesquiera que luego se simplifican adecuadamente.

Para transformar la fórmula anterior en una de estas fórmulas físicas deberíamos agregar un factor constante $k = 1\dfrac{1}{\text{rad}}$:

$$\lambda = k\,\theta\, r, \tag{9}$$

Veamos unos ejemplos de aplicación de la fórmula (9)

Ejemplos.

- $\theta = 2\,\text{rad}$; $r = 5$ cm.

$$\lambda = k\,\theta\, r = 1\,\frac{1}{\text{rad}}\; 2 \text{ rad } 5 \text{ cm} = \frac{2\,\cancel{\text{rad}}\, 5 \text{ cm}}{\cancel{\text{rad}}} = 10\, cm$$

- $\theta = 30^{o}$; $r = 0{,}3$ m

$$\lambda = k\,\theta\, r = 1\,\frac{1}{\text{rad}}\; 30^{o}\; 0{,}3 \text{ m} = 1\frac{1}{\cancel{\text{rad}}}\; 30^{\cancel{o}}\, 0{,}3 \text{ m}\, \frac{\pi\,\cancel{\text{rad}}}{180^{\cancel{o}}} = \frac{30\;\, 0{,}3\,\pi\,\text{m}}{180} = \frac{9\,\pi}{20} \text{ m}$$

El trabajo de sustitución es casi "mecánico"; en el segundo caso se ha incorporado un factor $\dfrac{\pi \text{ rad}}{180^{o}}$, que vale 1, donde intervienen grados y radianes, para posibilitar las simplificaciones.

Precaución durante el uso de calculadoras

Las calculadoras facilitan el cálculo de algunas funciones que tienen por argumentos ángulos; y suelen tener teclas que permiten preparar a la máquina para recibir ángulos expresados en radianes, grados sexagesimales o grados centesimales. Casi siempre la tecla para grados sexagesimales, (esos grados con los que un recto mide 90 grados) está marcada con "deg" (degree en inglés) y no con "grad" como quizás esperaríamos nosotros.

Naturalmente, si nos interesa trabajar con cierta unidad para ángulos y utilizamos la calculadora sin prestar atención a las unidades, podemos obtener resultados incorrectos. En resumen, es importante, antes de confiar en los cálculos de una calculadora, familiarizarse con el uso de la misma.

Lista de símbolos

Lista de axiomas

Bibliografía

[1] Cristina Ferraris. *Espacio, Geometría Métrica.* Universidad Nacional del Comahue, 1981.

[2] Pedro Puig Adam. *Curso de Geometría Métrica.* Nuevas Gráficas, 1961.

[3] Juan Alfredo Tirao. *El Plano.* Editorial Docencia S.A., 1979.

Índice alfabético